MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Daniel Pacák

Frakcionální geometrický Brownův pohyb

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce:	Mgr. Jana Šnupárková, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2018

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne ..... Podpis autora

Název práce: Frakcionální geometrický Brownův pohyb

Autor: Daniel Pacák

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Jana Šnupárková, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Tématem práce je studium geometrického frakcionálního Brownova pohybu. K tomuto účelu je v prvních částech textu shrnuta potřebná teorie. Text nejprve připomíná základy náhodných procesu. Poté je studován frakcionální Brownův pohyb. V další části je ukázána konstrukce Itôova stochastického integrálu podle Brownova pohybu se zaměřením na Itôovo lemma. Itôovo lemma je dále použito na odvození tvaru geometrického Brownova pohybu. V poslední části je představen geometrický frakcionální Brownův pohyb a je studováno jeho limitní chování. Limitní chování je předvedeno na simulacích.

Klíčová slova: Geometrický frakcionální Brownův pohyb, Itôův integrál, Itôovo lemma.

Title: Fractional geometric Brownian motion

Author: Daniel Pacák

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Mgr. Jana Šnupárková, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: The subject of this thesis is to study the geometric fracional Brownian motion. To do this, the necessary theory is presented. The first chapter summarizes the basic theory of stochastic processes. The second chapter deals with fractional Brownian motion. This is followed by the construction of Itô integral with respect to the Brownian motion. The main focus is the Itô's lemma. The formula for geometric Brownian motion is then derived using the Itô's lemma. In the last chapter deals with the geometric fractional Brownian motion. Its limit behaviour is studied. Some simulated examples are shown.

Keywords: Geometric fractional Brownian motion, Itô's integral, Itô's lemma.

Obsah

Úvod **2**

1 Náhodné procesy **3**

2 Brownův a frakcionální Brownův pohyb **5**
2.1 Zavedení 5
2.2 Základní vlastnosti 6

3 Geometrický Brownův pohyb **9**
3.1 Martingaly 9
3.2 Itôův integrál podle Brownova pohybu 11
3.3 Itôovo lemma 13

4 Geometrický frakcionální Brownův pohyb **17**
4.1 Limitní chování 18

Literatura **24**

Úvod

Cílem práce je studium Geometrického frakcionálního pohybu. K tomu je nutný patřičný matematický aparát. Jeho studium je náplní prvních částí tetu. Text je dělen následovně: v první části jsou připomenuty základní pojmy z teorie náhodných procesů. Ve druhé části je představen Brownův pohyb a frakcionální Brownův pohyb. Jsou uvedeny jejich definice a základní vlastnosti, které budou z velké části zapotřebí v pozdějších kapitolách. Třetí část je věnována geometrickému Brownovu pohybu. Nejprve se text věnuje základům martingalů a poté je představena konstrukce Itôova integrálu podle Brownova pohybu a jeho základní vlastnosti. V poslední části se text věnuje geometrickému frakcionálnímu Brownovu pohybu, speciálně jeho limitním chováním.

Na úvod je nutné říci, že práce do značné míry sdílí téma s již na MFF obhájenými (bakalářskými) prácemi. Snaha autora je odchýlit se od těchto prací v co největší míře. Toho je docíleno vynecháním (či uvedením jen náznaků) důkazů uvedených v již obhájených pracích a naopak zaměření se na další výsledky (například Itôvo lemma), které umožňují (elegantnější) studium geometrického frakcionálního Brownova pohybu. Úplné vynechání výsledků uvedených v jiných pracích není často možné, neboť jsou potřeba v pokročilejších tvrzeních, či jsou žádoucí pro úplnost textu.

Základem této práce je Brownův pohyb. Co se historického hlediska týče, tak označení Brownova pohybu pochází z fyziky, kde je pojmenováno po Robertu Brownovi, který ho v roce 1827 zdokumentoval. Jednoduchá fyzikální interpretace Brownova pohybu je pohyb částice, která se v každém časovém okamžiku t hýbe určitým směrem, ale pro libovolně malé $h > 0$ do ni v časovém okamžiku $[t,t+h]$ skoro jistě narazí jiná částice, a tedy směr pohybu částice v čase $t+h$ je jiný, než v čase t. Trajektorie částice má pak známou chaotickou podobu.

1. Náhodné procesy

V této kapitole připomeneme základní pojmy z náhodných procesů, s kterými budeme pracovat po zbytek práce.

Definice 1. *Nechť* $(\Omega,\mathcal{A},P)$ *je pravděpodobnostní prostor,* $T \subset \mathbb{R}$*. Rodina (reálných) náhodných veličin* $(X_t,t \in T)$ *definovaných na* $(\Omega,\mathcal{A},P)$ *nazýváme (reálný) náhodný proces.*

V celém textu se budeme zabývat pouze reálnými náhodnými procesy. Slovo „reálný“ tedy budeme od teď vynechávat, ale vždy ho myslíme. Náhodný proces můžeme chápat jako funkci dvou proměnných $t \in T$ a $\omega \in \Omega$. Pro pevné $t \in T$ je $X_t(\cdot)$ náhodná veličina. Pro pevné $\omega \in \Omega$ je $X_{(\cdot)}(\omega)$ funkcí proměnné t.

Definice 2. *Buď* $X = (X_t,t \in T)$ *náhodný proces.*

i) *Pro pevné* $\omega \in \Omega$ *se funkce* $X_{(\cdot)}(\omega)$ *nazývá trajektorie procesu* X*.*

ii) *Nechť pro každé* $t \in T$ *existuje* $E[X_t]$*. Pak funkci* $\mu_t := E[X_t]$ *definovanou na* T *nazýváme střední hodnotou procesu* X*.*

iii) *Nechť pro každé* $t \in T$ *je* $E|X_t|^2 < +\infty$*. Potom funkci dvou proměnných definovanou na* $T \times T$ *předpisem* $R(t,s) := E[(X_t - \mu_t)(X_s - \mu_s)]$ *nazveme autokovarianční funkcí procesu* X*.* $R(t,t)$ *nazýváme rozptyl procesu* X *v čase* t*.*

Definice 3. *Řekneme, že náhodný proces* $(X_t,t \in T)$ *je*

i) *spojitý, pokud má všechny trajektorie spojité, tj. pokud* $\forall \omega \in \Omega : X_{(\cdot)}(\omega)$ *je spojitá na* T*.*

ii) *skoro jistě spojitý, pokud má skoro všechny trajektorie spojité, tj. pokud je* $X_{(\cdot)}(\omega)$ *spojité na* T *pro skoro všechna* $\omega \in \Omega$*.*

iii) *centrovaný, pokud* $\forall t \in T : \mu_t = 0$*.*

iv) *gaussovský, pokud pro každá* $t_1,\dots,t_n \in T$ *má vektor* $(X_{t_1},\cdots,X_{t_n})^{\mathrm{T}}$ *n-rozměrné normální rozdělení.*

Definice 4. *Buďte* $(X_t,t \in T)$ *a* $(Y_t,t \in T)$ *náhodné procesy.*

i) *Řekneme, že* $(Y_t,t \in T)$ *je modifikací procesu* $(X_t,t \in T)$*, pokud*

$$\forall t \in T : P(X_t = Y_t) = 1.$$

ii) *Řekneme, že procesy* $(Y_t,t \in T)$ *a* $(X_t,t \in T)$ *jsou nerozlišitelné, pokud*

$$P(\forall t \in T : X_t = Y_t) = 1.$$

Pro náhodné procesy zavádíme následující značení: $X = (X_t,t \geq 0) \sim Y = (Y_t,t \geq 0) \iff X$ a Y mají stejná konečněrozměrná rozdělení.

Definice 5. *Řekneme, že náhodný proces* $(X_t, t \geq 0)$ *je soběpodobný s koeficientem podobnosti* $H \in \mathbb{R}$*, pokud*

$$\forall a > 0 : (X_{at}, t \geq 0) \sim (a^H X_t, t \geq 0).$$

Předchozí definice je důležitá, neboť ji frakcionální Brownův pohyb splňuje. Následující definici budeme potřebovat při důkazu Itôova lemmatu.

Definice 6. *Buď* $(X_t, t \geq 0)$ *náhodný proces. Buď* $([X]_t^2, t \geq 0)$ *náhodný proces takový, že pro každé* $t \geq 0$ *a pro každou posloupnost dělení* $D^{(n)} = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n\}, n \in \mathbb{N}$*, splňující* $||D^{(n)}|| \to 0, n \to +\infty$*, platí*

$$V^2_{D^{(n)}} \xrightarrow[n \to +\infty]{p} [X]_t^2,$$

kde

$$V^2_{D^{(n)}} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(X_{t_{i+1}} - X_{t_i} \right)^2.$$

Pak $([X]_t^2, t \geq 0)$ *nazýváme kvadratickou variací procesu* $(X_t, t \geq 0)$*.*

Následující dvě věty jsme si pro jejich důležitost při konstrukci (spojitých) náhodných procesů nemohli odpustit.

Věta 1 (Daniell-Kolmogorov)**.** *Buď* $\{F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n)\}$ *konzistentní systém distribučních funkcí. Potom existuje náhodný proces* $(X_t, t \in T)$ *takový, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$*, libovolné* $t_1, \ldots, t_n \in T$ *a libovolná reálná* $x_1, \ldots, x_n$ *platí*

$$P(X_{t_1} \leq x_1, \ldots, X_{t_n} \leq x_n) = F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n)$$

Důkaz. Viz [1], věta I.10.3. □

Věta 2 (Kolmogorovova o spojité modifikaci)**.** *Buď* $(X_t, t \geq 0)$ *proces splňující podmínku*

$$E|X_s - X_t|^\alpha \leq K|s - t|^{1+\delta}, s, t \geq 0,$$

pro nějaké $K, \alpha, \delta > 0$*. Potom existuje spojitá modifikace procesu* $(X_t, t \geq 0)$*.*

Důkaz. [1], věta III.5.8. □

2. Brownův a frakcionální Brownův pohyb

V téte kapitole se budeme věnovat frakcionálnímu Brownovu pohybu a jeho speciálnímu případu, („obyčejnému“) Brownovu pohybu. V matematice se místo Brownův pohyb častěji říká Wienerův proces. Je poté hezké chápat Brownův pohyb jako fyzikální jev a Wienerův proces jako jeho matematický model. Na druhou stranu, zobecnění Wienerova procesu se téměř vždy říká frakcionální Brownův pohyb. My budeme v této práci používat název Brownův pohyb.

2.1 Zavedení

Nyní zavedeme Brownův a frakcionální Brownův pohyb.

Definice 7 (Klasická definice Brownova pohybu)**.** *Náhodný proces* $(B_t,t \geq 0)$ *nazýváme Brownovým pohybem, pokud*

i) $B_0 = 0$ *s.j. a* $(B_t,t \geq 0)$ *je spojitý.*

ii) Pro libovolné časové okamžiky $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ *jsou (nepřekrývající se) přírůstky procesu* $B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ *nezávislé náhodné veličiny.*

iii) Pro libovolné $t,s \geq 0$ *je* $B_t - B_s \sim N(0,|t-s|)$ *a speciálně tedy* $B_t \sim N(0,t), t \geq 0$.

Definice 8. *Buď* $H \in (0,1)$*. Frakcionální Brownův pohyb s Hurstovým indexem* H *je spojitý centrovaný gaussovský proces* $(B_t^H,t \geq 0)$ *s autokovarianční funkcí*

$$E[B_t^H B_s^H] = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right),\ t,s \geq 0.$$

První věc, co se musí ověřit, je existence. Tu zabezpečuje následující věta.

Věta 3. *Pro všechna* $H \in (0,1)$ *existuje frakcionální Brownův pohyb* $(B_t^H,t \geq 0)$.

Důkaz. Ukáže se, že funkce $(t,s) \mapsto \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right)$ je pozitivně semidefinitní a symetrická. Pak z Daniellov-Kolmogorovy věty máme existenci procesu, který je centrovaný, gaussovský a má danou funkci za svou autokovarianční funkci. Poté se ověří podmínka z Komlmogorovy věty o spojité modifikaci. □

V celém dalším textu, bude vždy $(B_t^H,t \geq 0)$ frakcionální Brownův pohyb a $(B_t,t \geq 0)$ bude vždy Brownův pohyb. Již jsme zmínili, že Brownův pohyb je speciálním případem frakcionálního Brownova pohybu. Další věta toto zpřesňuje.

Věta 4. $(B_t^H,t \geq 0)$ *je pro* $H = 1/2$ *Brownův pohyb ve smyslu klasické definice.*

Důkaz. Viz [1], věta III.5.9. □

Poněkud sofistikovanější než klasická je tedy následující definice Brownova pohybu.

Definice 9. *Náhodný proces* $(B_t,t \geq 0)$ *nazýváme Brownovým pohybem, pokud* $(B_t,t \geq 0)$ *je spojitý centrovaný gaussovský proces s autokovarianční funkcí*

$$E[B_t B_s] = \frac{1}{2}(t + s - |t-s|) = \min\{t,s\},\ t,s \geq 0.$$

2.2 Základní vlastnosti

Následující věty shrnují základní vlastnosti frakcionálního Brownova pohybu, které budeme potřebovat v dalším textu.

Věta 5. *Pro frakcionální Brownův pohyb* $(B_t^H, t \geq 0)$ *platí:*

i) $B_0^H = 0$ *s.j.*

ii) $B_t^H \sim N(0, t^{2H})$, $t \geq 0$.

iii) $B_{t+s}^H - B_s^H \sim B_t^H$, $t, s \geq 0$.

Pro Brownův pohyb máme rovnou z klasické definice nezávislost přírůstků. Pro frakcionální Brownův pohyb (s $H \neq \frac{1}{2}$) je situace složitější. Povídá o tom následující věta.

Věta 6. *Buďte* $s, t, h \geq 0, s + h \leq t$ *a* $H \in (0,1)$. *Položme*

$$\rho(s,t,h) := Cov\left(B_{t+h}^H - B_t^H, B_{s+h}^H - B_s^H\right).$$

Pak

- $\rho(s,t,h) > 0$ *pro* $H > \frac{1}{2}$.
- $\rho(s,t,h) < 0$ *pro* $H < \frac{1}{2}$.

V úvodní kapitole jsme předeslali soběpodobnost frakcionálního Brownova pohybu. Toto zabezpečuje následující věta.

Věta 7 (Soběpodobnost)**.** *Frakcionální Brownův pohyb* $(B_t^H, t \geq 0)$ *je soběpodobný s parametrem soběpodobnosti H, tj.*

$$\forall a > 0 : (B_{at}^H, t \geq 0) \sim (a^H B_t^H, t \geq 0).$$

Důkaz. Viz [3], Proposition 2.2. □

Následující vlastnosti budeme potřebovat v poslední kapitole.

Věta 8 (Časová inverze)**.** *Položme* $X_0 = 0$ *a* $X_t = t^{2H} B_{\frac{1}{t}}^H$, $t > 0$. *Pak* $X_t, t \geq 0$ *je frakcionální Brownův pohyb.*

Důkaz. Viz [3], Proposition 2.2. □

V dalších kapitolách budeme potřebovat kvadratickou variaci Brownova pohybu. Následující věta nám ji dává.

Věta 9. *Buď* $(B_t, t \geq 0)$ *Brownův pohyb. Buď* $0 \leq a < b < \infty$. *Mějme posloupnost dělení*

$$D^{(n)} = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b\}$$

intervalu $[a,b]$ *splňující* $||D^{(n)}|| \to 0, n \to +\infty$. *Potom*

$$\sum_{i=1}^{n} \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{L_2} b - a$$

Důkaz. Je $b-a=\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})$. Položíme

$$\psi_n := \sum_{i=1}^{n}\left[\left(B_{t_i}-B_{t_{i-1}}\right)^2-(t_i-t_{i-1})\right]=\sum_{i=1}^{n}X_i,$$

kde $X_i=\left(B_{t_i}-B_{t_{i-1}}\right)^2-(t_i-t_{i-1})$. Potom

$$\psi_n^2=\sum_{i,j=1}^{n}X_iX_j.$$

Pro $i\neq j$ máme

$$\begin{aligned}E[X_iX_j]&=E[X_i]\cdot E[X_j]\\&=E\left[\left(B_{t_i}-B_{t_{i-1}}\right)^2\right]-(t_i-t_{i-1})+E\left[\left(B_{t_j}-B_{t_{j-1}}\right)^2\right]-(t_j-t_{j-1})\\&=(t_i-t_{i-1})-(t_i-t_{i-1})+(t_j-t_{j-1})-(t_j-t_{j-1})=0,\end{aligned}$$

kde první rovnost je z nezávislosti přírůstků Brownova pohybu a třetí rovnost je z faktu, že $B_{t_i}-B_{t_{i-1}}\sim N(0,t_i-t_{i-1})$. Dále z vlastností normálního rozdělení platí, že

$$E\left[(B_t-B_s)^4\right]=3(t-s)^2,\ 0\leq s<t.$$

Tedy můžeme psát

$$\begin{aligned}E\left[(X_i)^2\right]&=E\left[\left(\left(B_{t_i}-B_{t_{i-1}}\right)^2-(t_i-t_{i-1})\right)^2\right]\\&=E\left[\left(B_{t_i}-B_{t_{i-1}}\right)^4-2\left(t_i-t_{i-1}\right)\left(B_{t_i}-B_{t_{i-1}}\right)+\left(t_i-t_{i-1}\right)^2\right]\\&=3\left(t_i-t_{i-1}\right)^2-2\left(t_i-t_{i-1}\right)^2+\left(t_i-t_{i-1}\right)^2\\&=2\left(t_i-t_{i-1}\right)^2\end{aligned}$$

Celkem tedy máme, že

$$\begin{aligned}E[\psi_n^2]&=\sum_{i=1}^{n}2\left(t_i-t_{i-1}\right)^2\leq 2\left(\sup_{1\leq i\leq n}|t_i-t_{i-1}|\right)\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\\&=2(b-a)\left(\sup_{1\leq i\leq n}|t_i-t_{i-1}|\right)\to 0, n\to+\infty.\end{aligned}$$

To spolu s definicí ψ dokončuje důkaz. □

Věta 10 (Kvadratická variace Brownova pohybu)**.** *Buď* $(X_t,t\geq 0)$ *Brownův pohyb. Pak pro jeho kvadratickou variaci* $([X]_t^2:t\geq 0)$ *platí*

$$\forall t\geq 0:[X]_t^2=t.$$

Důkaz. Stačí použít předchozí větu s $a=0,b=t$ a uvědomit si, že konvergence v L_2 implikuje konvergenci v pravděpodobnosti. □

Je dobře známé (viz například [1] VII.1.8), že pro Brownův pohyb $(B_t, t \geq 0)$ platí následující verze zákona iterovaného logaritmu:

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log\log t}} = 1 \quad \text{s.j.} \quad a \quad \liminf_{t\to+\infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log\log t}} = -1 \quad \text{s.j.}$$

Pro frakcionální Brownův pohyb platí analogické tvrzení.

Věta 11. *Platí*

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{B_t^H}{t^H \sqrt{2 \log\log t}} = c_H \quad s.j. \quad a \quad \liminf_{t\to+\infty} \frac{B_t^H}{t^H \sqrt{2 \log\log t}} = -c_H \quad s.j.,$$

kde c_H je nějaká vhodná konstanta (závisející pouze na H).

Důkaz. Viz důsledek 3.1 z [4]. □

Předchozí tvrzení budeme potřebovat v závěru textu při vyšetřování limitního chování geometrického frakcionálního Brownova pohybu.

3. Geometrický Brownův pohyb

Cílem této kapitoly je zavést geometrický Brownův pohyb. Ten se obvykle definuje jako řešení jisté stochastické diferenciální rovnice. Jako motivaci uveďme nejprve tuto definici.

Definice 10. *Geometrický Brownův pohyb je proces* $(X_t, t \in [0,T])$ *splňující rovnici*

$$dX_t = aX_t dt + bX_t dB_t,\ X_0 = x_0$$

na daném intervalu $[0,T]$*, kde* $a, b, x_0 \in \mathbb{R}, b \neq 0$ *jsou dané a* $(B_t, t \in [0,1])$ *je Brownův pohyb, kde pod pojmem „splňující rovnici“ je myšleno, že* X_t *je ve tvaru*

$$X_t = x_0 + \int_0^t aX_s\, ds + \int_0^t bX_s\, dB_s,\ \ t \in [0,T],$$

kde první integrál je Lebesgueův a druhý Itôův.

Tedy abychom mohli geometrický Brownův pohyb studovat, musíme vědět, jak je definován Itôův integrál podle Brownova pohybu

$$\int_0^t X_s\, dB_s.$$

Poznamenejme, že Itôův integrál není jediný stochastický integrál. V předchozí definici bychom mohli místo Itôva integrálu uvažovat například Stratonovičův a můžeme pak dostat jiný tvar řešení. V tomto textu jiné stochastické integrály než Itôův však uvažovat nebudeme. Zavedení Itôova integrálu podle Brownova pohybu je jednou z náplní této kapitoly. Další bude odvození Itôvy formule. Nejprve se ale věnujme martingalům, jejichž teorii budeme potřebovat.

3.1 Martingaly

Definice 11. *Systém* σ*-algeber* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *nazveme filtrací pravděpodobnostního prostoru* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$*, pokud zároveň platí*

- $\forall t \geq 0 : \mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$
- $\forall\, 0 \leq t \leq s : \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$

Definice 12. *Filtraci* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *nazveme*

i) úplnou, pokud $\mathcal{F}_0$ *obsahuje všechny množiny nulové míry.*

ii) zprava spojitou, pokud pro každé $t \geq 0$ *je* $\mathcal{F}_t = \bigcap_{h>0} \mathcal{F}_{t+h}$.

Dále říkáme, že $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *splňuje obvyklé podmínky, pokud je úplná a zprava spojitá.*

V dalším textu budeme předpokládat, že všechny filtrace splňují obvyklé podmínky.

Definice 13. *Buď* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *filtrace na pravděpodobnostním prostoru* $(\Omega,\mathcal{A},P)$. *Pak uspořádanou čtveřici* $(\Omega,\mathcal{A},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},P)$ *nazveme prostorem s filtrací.*

Definice 14. *Buď* $(\Omega,\mathcal{A},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},P)$ *prostor s filtrací a* $(X_t,t\geq 0)$ *náhodný proces. Potom* $(X_t,t\geq 0)$ *nazveme*

i) měřitelným, pokud zobrazení $(t,\omega)\mapsto X_t(\omega)$ *je měřitelné vůči* $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}_0^+)$.

ii) $\mathcal{F}_t$*-adaptovaným, pokud pro každé* $t\geq 0$ *je náhodná veličina* X_t *měřitelná vůči* $\mathcal{F}_t$.

iii) $\mathcal{F}_t$*-progresivně měřitelným, pokud zobrazení definované na* $\Omega\times[0,t]$ *předpisem* $(s,\omega)\mapsto X_s(\omega)$ *je* $\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{B}([0,t])$*-měřitelné.*

Definice 15. *Mějme Brownův pohyb* $(B_t,t\geq 0)$ *a filtraci* $(\mathcal{F}_t,t\geq 0)$. *Řekneme, že* $(B_t,t\geq 0)$ *je* $\mathcal{F}_t$*-Brownův, pokud* $(B_t,t\geq 0)$ *je* $\mathcal{F}_t$*-adaptovaný a pro každé* $0\leq t<s$ *jsou* F_t *a* $\sigma(B_s-B_t)$ *nezávislé* σ*-algebry.*

Definice 16. *Buď* $X=(X_t,t\geq 0)$ *náhodný proces. Potom minimální filtraci, vůči níž je proces* $(X_t,t\geq 0)$ *adaptovaný, nazýváme jeho přirozenou (kanonickou) filtrací a značíme ji* $(\mathcal{F}_t^X)_{t\geq 0}$, *tj.* $\mathcal{F}_t^X=\sigma((X_s,s\leq t))$.

Nyní konečně můžeme začít pracovat s martingaly.

Definice 17. *Náhodný proces* $(M_t,t\geq 0)$ *na* $(\Omega,\mathcal{A},P)$ *nazveme martingal, jestliže:*

- $\forall t\geq 0: E|M_t|<+\infty$,
- $\forall 0\leq s\leq t: E[M_t|\mathcal{F}_s^M]=M_s$ *s.j.*

Buď $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *filtrace na* $(\Omega,\mathcal{A},P)$. $(M_t,t\geq 0)$ *nazveme* $\mathcal{F}_t$*-martingal, jestliže:*

- $\forall t\geq 0: E|M_t|<+\infty$,
- $\forall 0\leq s\leq t: E[M_t|\mathcal{F}_s]=M_s$ *s.j.*
- $(M_t,t\geq 0)$ *je* $\mathcal{F}_t$*-adaptovaný.*

Věta 12. *Buď* $B=(B_t,t\geq 0)$ *Brownův pohyb. Potom platí:*

i) $(B_t,t\geq 0)$ *je martingal.*

ii) $(B_t^2-t,t\geq 0)$ *je martingal.*

Důkaz. Buď $0\leq s\leq t$. Ověříme martingalovou vlastnost.

i)

$$\begin{aligned}E\left[B_t|\mathcal{F}_s^B\right]&=E\left[B_t-B_s+B_s|\mathcal{F}_s^B\right]=E\left[B_t-B_s|\mathcal{F}_s^B\right]+B_s\\&=E\left[B_t-B_s\right]+B_s=B_s\quad\text{s.j.}\end{aligned}$$

ii) S využitím i) platí

$$
\begin{aligned}
&E\left[(B_t^2 - t) - (B_s^2 - s)|\mathcal{F}_s^B\right] \\
&= E\left[(B_t^2 - B_s^2)|\mathcal{F}_s\right] - (t-s) \\
&= E\left[(B_s + B_t - B_s)^2 - B_s^2|\mathcal{F}_s^B\right] - (t-s) \\
&= E\left[B_s^2 + 2B_s(B_t - B_s) + (B_t - B_s)^2 - B_s^2|\mathcal{F}_s^B\right] - (t-s) \\
&= 2B_s E\left[B_t - B_s|\mathcal{F}_s^B\right] + E\left[(B_t - B_s)^2|\mathcal{F}_s^B\right] - (t-s) \\
&= 2B_s E\left[B_t - B_s\right] + E\left[(B_t - B_s)^2\right] - (t-s) \\
&= 0 + (t-s) - (t-s) = 0 \quad \text{s.j.}
\end{aligned}
$$

□

Definice 18. *Buď $p \in \mathbb{N}$. Martingal $(M_t, t \geq 0)$ nazveme L_p-martingalem, pokud $\forall t \geq 0 : E\left[|M_t|^p\right] < +\infty$. Množinu všech spojitých $\mathcal{F}_t$-martingalů, které jsou zároveň L_2-martingaly označíme $CM_2(\mathcal{F}_t)$.*

Věta 13. *Zobrazení ρ_m definované na $CM_2(\mathcal{F}_t) \times CM_2(\mathcal{F}_t)$ předpisem*

$$
\rho_m(X_t, Y_t) := \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} \sqrt{\min\left\{1, E\left[(X_k - Y_k)^2\right]\right\}} \right), X_t, Y_t \in CM_2(\mathcal{F}_t),
$$

je metrika na $CM_2(\mathcal{F}_t)$, za podmínky, že na $CM_2(\mathcal{F}_t)$ ztotožníme nerozlišitelné procesy.

3.2 Itôův integrál podle Brownova pohybu

V této části zavedeme Itôův integrál podle Brownova pohybu. Konstrukce je převzata s poznámek z kurzu Stochastická analýza. Důkazy v této části lze najít například v [7] nebo v [8]. Konstrukce v zásadě připomíná konstrukci Lebesgueova integrálu. Nejprve se definuje Itôův integrál pro malou třídu „jednoduchých“ procesů. Potom se vezme větší třída procesů, v které jsou „jednoduché“ procesy husté. Itôův se pak definuje jako příslušná limita. Formální konstrukce je následující.

Definice 19. *Náhodný proces $(X_t, t \geq 0)$ nazveme $\mathcal{F}_t$-jednoduchým, jestliže existuje rostoucí reálná posloupnost $(t_n)_{n=1}^{+\infty}$, $t_0 = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = +\infty$ a k ní existuje posloupnost náhodných veličin $(Y_n)_{n=0}^{+\infty}$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ je Y_n F_{t_n}-měřitelná, pro každé $\omega \in \Omega$ je $\sup\limits_{n \geq 0} |Y_n(\omega)| \leq C < +\infty$ pro nějakou vhodnou konstantu $C \in \mathbb{R}$ a platí*

$$
\forall \omega \in \Omega \ \forall t \geq 0 : X_t(\omega) = Y_0(\omega) \mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{j=0}^{+\infty} Y_j(\omega) \mathbb{1}_{(t_j, t_{j+1}]}(t).
$$

Množinu $\mathcal{F}_t$-jednoduchých procesů značíme $\mathcal{L}_0(\mathcal{F}_t)$.

Definice 20. *Buď* $(X_t,t \geq 0)$ $\mathcal{F}_t$*-jednoduchý proces. Pak pro* $t \geq 0$ *definujeme náhodné veličiny*

$$\int_0^t X_s\,dB_s := Y_k(B_t - B_{t_k}) + \sum_{i=0}^{k-1} Y_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}),\ \ t \in (t_k,t_{k+1}],$$

kde $(B_t,t \geq 0)$ *je* $\mathcal{F}_t$*-Brownův pohyb. Náhodný proces*

$$\left(\int_0^t X_s\,dB_s,t \geq 0\right)$$

nazveme Itôovým integrálem jednoduchého procesu $(X_t,t \geq 0)$.

Máme tedy Itôův integrál jednoduchého procesu. Následující dvě věty ukazují jeho vlastnosti.

Věta 14. *Buď* $(X_t,t \geq 0) \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}_t)$ *a* $(B_t,t \geq 0)$ $\mathcal{F}_t$*-Brownův pohyb. Potom*

i) $\left(\int_0^t X_s\,dB_s,t \geq 0\right) \in CM_2(\mathcal{F}_t)$,

ii) $\forall t \geq 0 : E\left[\int_0^t X_s\,dB_s\right] = 0$,

iii) $\forall t \geq 0 : E\left[\left(\int_0^t X_s\,dB_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^t X_s^2\,ds\right]$.

Věta 15. *Buď* $a,b \in \mathbb{R}$, $(X_t,t \geq 0),(Y_t,t \geq 0) \in \mathcal{L}_0(\mathcal{F}_t)$ *a* $(B_t,t \geq 0)$ $\mathcal{F}_t$*-Brownův pohyb. Potom*

$$\forall t \geq 0 : \int_0^t (aX_s + bY_s)\,dB_s = a\int_0^t X_s\,dB_s + b\int_0^t Y_s\,dB_s \quad s.j.$$

Následně vezmeme vhodnou množinu náhodných procesů, na kterou rozšíříme definici Itôova integrálu.

Definice 21. *Množinu všech* $\mathcal{F}_t$*-progresivně měřitelných procesů* $(X_t,t \geq 0)$ *takových, že*

$$\forall t \geq 0 : E\left[\left(\int_0^t X_s\,ds\right)^2\right] < +\infty$$

označíme $\mathcal{L}_2(\mathcal{F}_t)$.

Věta 16. *Zobrazení* ρ_2 *definované na* $\mathcal{L}_2(\mathcal{F}_t) \times \mathcal{L}_2(\mathcal{F}_t)$ *předpisem*

$$\rho_2(X,Y) := \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}\sqrt{\min\left\{1,E\left[\int_0^k (X_u - Y_u)^2\,du\right]\right\}}\right), X,Y \in \mathcal{L}_2(\mathcal{F}_t),$$

je metrika na $\mathcal{L}_2(\mathcal{F}_t)$, *za podmínky, že na* $\mathcal{L}_2(\mathcal{F}_t)$ *ztotožníme nerozlišitelné procesy.*

Věta 17. *Množina $\mathcal{L}_0(\mathcal{F}_t)$ je hustá v $(\mathcal{L}_2(\mathcal{F}_t),\rho_2)$.*

Věta 18. *Buď $X = (X_t,t \geq 0) \in \mathcal{L}_2(\mathcal{F}_t)$. Pak existuje právě jeden náhodný proces $Y = (Y_t, t \geq 0) \in CM_2(\mathcal{F}_t)$ takový, že pro každou posloupnost $(Z^{(n)} = (Z_t^{(n)},t \geq 0))_{n=1}^{+\infty} \subset \mathcal{L}_0(\mathcal{F}_t)$ splňující*

$$\lim_{n\to+\infty} \rho_2\left(Z^{(n)},Y\right) = 0,$$

platí

$$\lim_{n\to+\infty} \rho_m\left(\left(\int_0^t Z_s^{(n)}\, dB_s,t \geq 0\right), Y\right) = 0.$$

Definice 22. *Za situace předchozí věty martingal $(Y_t,t \geq 0)$ nazýváme Itôovým integrálem procesu $(X_t,t \geq 0)$. Pak značíme*

$$\int_0^t X_s\, dB_s := Y_t,\ t \geq 0.$$

Rozšířili jsme tedy definici Itôva integrálu na procesy z $\mathcal{L}_2(\mathcal{F}_t)$. Zbývá se přesvědčit, že vlastnosti Itôva integrálu odvozené pro jednoduché procesy zůstaly zachovány. To zabezpečuje následující věta.

Věta 19. *Buďte $(X_t,t \geq 0),(Y_t,t \geq 0) \in \mathcal{L}_2(\mathcal{F}_t), a,b \in \mathbb{R}$. Potom pro každé $t \geq 0$ platí:*

i) $\int_0^t (aX_s + bY_s)\, dB_s = a\int_0^t X_s\, dB_s + b\int_0^t Y_s\, dB_s,$

ii) $E\left[\int_0^t X_s\, dB_s\right] = 0$

iii) $E\left[\left(\int_0^t X_s\, dB_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^t X_s^2\, ds\right]$

Máme tedy vybudovaný Itôův stochastický integrál podle Brownova pohybu a mohli bychom se zajímat o geometrický Brownův pohyb. Kromě definice a základních vlastností Itôova integrálu nemáme však žádný nástroj na řešení dané integrální rovnice. V následující podkapitole takový nástroj odvodíme.

3.3 Itôovo lemma

Začneme se dvěma výsledky, které které jsou zajímavé sami o sobě. Jde však o klíčová fakta, potřebná pro důkaz Itôova lemmatu.

Lemma 20. *Buď f spojitá a omezená funkce na $\mathbb{R}$. Mějme posloupnost dělení $D^{(n)} = \{t_0 = 0 < t_1 \cdots < t_{n-1} < t_n = t\}, n \in \mathbb{N}$, splňující $||D^{(n)}|| \to 0, n \to +\infty$. Potom*

$$\sum_{j=1}^n f(B_{t_{j-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2 \xrightarrow{L_2} \int_0^t f(B_s)\, ds,\ n \to +\infty.$$

Důkaz. Ze spojitosti f a spojitosti Brownova pohybu máme konvergenci skoro jistě

$$\sum_{j=1}^{n} f(B_{t_{j-1}})(t_j - t_{j-1}) \to \int_0^t f(B_s)\,ds, \;\; n \to +\infty.$$

Stačí tedy ukázat, že

$$A_n := \sum_{j=1}^{n} f(B_{t_{j-1}}) \left[(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2 - (t_j - t_{j-1})\right] \xrightarrow{L_2} 0, \;\; n \to +\infty.$$

Položme $\Delta_j := t_j - t_{j-1}$ a $\Delta B_j := B_{t_j} - B_{t_{j-1}}$. Nechť $i > j$, Pak s využitím vlastností podmíněné střední hodnoty a toho, že $B_t^2 - t$ je martingal, počítejme

$$\begin{aligned}
&E\left[f(B_{t_{j-1}})f(B_{t_{i-1}})\left((\Delta B_j)^2 - \Delta_j\right)\left((\Delta B_i)^2 - \Delta_i\right)\right] \\
=&E\left[E\left[f(B_{t_{j-1}})f(B_{t_{i-1}})\left((\Delta B_j)^2 - \Delta_j\right)\left((\Delta B_i)^2 - \Delta_i\right)\middle|\mathcal{F}_{t_{j-1}}\right]\right] \\
=&E\left[f(B_{t_{j-1}})f(B_{t_{i-1}})\left((\Delta B_i)^2 - \Delta_i\right)E\left[\left((\Delta B_j)^2 - \Delta_j\right)\middle|\mathcal{F}_{t_{j-1}}\right]\right] \\
=&E\left[f(B_{t_{j-1}})f(B_{t_{i-1}})\left((\Delta B_i)^2 - \Delta_i\right)E\left[(\Delta B_j)^2 - \Delta_j\right]\right] = 0,
\end{aligned}$$

neboť $E\left[(\Delta B_j)^2 - \Delta_j\right] = \Delta_j - \Delta_j = 0$. Z toho máme

$$E\left[(A_n)^2\right] = E\left[\sum_{j=1}^{n} f^2(B_{t_j})\left((\Delta B_j)^2 - \Delta_j\right)^2\right].$$

A tedy konečně, ze soběpodobnosti Brownova pohybu,

$$\begin{aligned}
E\left[(A_n)^2\right] &\le \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} f^2(x)\right) \cdot \sum_{j=1}^{n} E\left[\left((\Delta B_j)^2 - \Delta_j\right)^2\right] \\
&\le \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} f^2(x)\right) \cdot \sum_{j=1}^{n} \Delta_j^2 E\left[(B_1^2 - 1)^2\right] \\
&\le \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} f^2(x)\right) \cdot E\left[(B_1^2 - 1)^2\right] \cdot \left(\sup_{1\le j\le n} |t_j - t_{j-1}|\right) \cdot \sum_{j=1}^{n} \Delta_j \\
&= C \cdot \left(\sup_{1\le j\le n} |t_j - t_{j-1}|\right) \to 0,\; n \to +\infty.
\end{aligned}$$

kde $C = (\sup_{x\in\mathbb{R}} f^2(x)) \cdot E\left[(B_1^2 - 1)^2\right] \cdot t < +\infty$. □

Věta 21. *Buď* $(f(t), t \ge 0)$ *spojitý* $\mathcal{F}_t$*-adaptovaný. Buď*

$$D^{(n)} = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = t\}$$

posloupnost dělení intervalu $[0,t]$ *splňující* $||D^{(n)}|| \to 0, n \to +\infty$. *Potom*

$$\sum_{i=0}^{n} f(t_i)\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{P} \int_0^t f(s)dB_s.$$

Důkaz. Viz [8], věta 5.3.3. □

Věta 22 (Itôovo lemma, Itôova formule)**.** *Buď* $(B_t,t \geq 0)$ *Brownův pohyb a* $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$ *jeho přirozená filtrace. Buď* $f : (t,x) \mapsto f(t,x)$, $f \in C^2([0,+\infty) \times \mathbb{R})$. *Potom pro každé* $t > 0$ *platí:*

$$f(t,B_t) - f(0,B_0) = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,B_s)\,ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,B_s)\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,B_s)\,ds \quad s.j.$$

Důkaz. Buď $t > 0$ libovolné pevné. Uvažujme posloupnost děleních $D^{(n)} = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = t\}, n \in \mathbb{N}$ intervalu $[0,t]$. S použitím Taylorova rozvoje dostaneme

$$\begin{aligned}
f(t,B_t) - f(0,0) &= \sum_{i=0}^{n-1} \Big[f(t_{i+1},B_{t_{i+1}}) - f(t_i,B_{t_i})\Big] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial t}(t_i,B_{t_i})(t_{i+1} - t_i) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x}(t_i,B_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t_i,B_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_i,B_{t_i})(t_{i+1} - t_i)^2 \\
&+ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}(t_i,B_{t_i})(t_{i+1} - t_i)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \\
&+ \sum_{i=0}^{n-1} O((t_{i+1} - t_i)^3) + \sum_{i=0}^{n-1} O((B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^3) \\
&:= A + B + C + D + E + F + G.
\end{aligned}$$

Ze spojitosti derivací f máme

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial t}(t_i,B_{t_i})(t_{i+1} - t_i) \xrightarrow{\text{s.j.}} \int_0^t f(s,B_s)\,ds,\ n \to +\infty.$$

Dále, dle věty 21, máme

$$B = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x}(t_i,B_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \xrightarrow{\text{p}} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,B_s)\,dB_s,\ n \to +\infty.$$

Dle lemmatu 20 máme

$$C = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t_i,B_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \xrightarrow{L_2} \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,B_s)\,ds.$$

Víme, že konvergence v L_2 implikuje konvergenci v pravděpodobnosti. Dále víme, že pokud posloupnost konverguje v pravděpodobnosti, tak existuje podposloupnost konvergující skoro jistě (ke stejné náhodne veličině). Místo vybrání podposloupnosti dělení předpokládejme, že obě předchozí konvergence jsou skoro jistě. To můžeme udělat, neboť výsledek pro A funguje pro libovolnou podposloupnost.

Dále, ze spojitosti $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$, spojitosti Brownova pohybu a toho, že $[0,t]$ je kompaktní interval, je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,B_t) \leq M_D \text{ na } [0,t] \text{ s.j.},$$

pro vhodné $M_D \in \mathbb{R}$. A tedy skoro jistě platí

$$|D| = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_i,B_{t_i})(t_{i+1}-t_i)^2 \leq M_D \cdot t \cdot \sup_{0\leq i\leq n} |t_{i+1}-t_i| \to 0, n \to +\infty.$$

Stejně tak, ze spojitosti Brownova pohybu, skoro jistě platí

$$\begin{aligned} |E| &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}(t_i,B_{t_i})(t_{i+1}-t_i)(B_{t_{i+1}}-B_{t_i}) \\ &\leq M_E \cdot t \cdot \sup_{0\leq i\leq n} |B_{t_{i+1}}-B_{t_i}| \to 0, n \to +\infty. \end{aligned}$$

Dále skoro jistě je

$$|F| \leq M_E \cdot \sum_{n=0}^{n-1} (t_{t+1}-t_i)^3 \leq \left(\sup_{0\leq i\leq n} |t_{i+1}-t_i|\right)^2 \cdot tM_E \longrightarrow 0, n \to +\infty.$$

A nakonec, s využitím znalosti kvadratické variance Brownova pohybu, platí

$$\begin{aligned} |G| &\leq M_G \sum_{i=0}^{n-1} (B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^3 \\ &\leq M_G \left(\sup_{0\leq i\leq n} |B_{t_{i+1}}-B_{t_i}|\right) \sum_{i=0}^{n-1} (B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^2 \xrightarrow{\mathrm{P}} M_G \cdot t \cdot 0 = 0, n \to +\infty. \end{aligned}$$

Stejně jako výše však můžeme předpokládat, že konvergence je skoro jistě. Tím je důkaz dokončen. □

Nyní ukážeme, že

$$X_t = x_0 \exp\left\{bB_t + at - \frac{1}{2}b^2 t\right\}, \, t \in [0,T]$$

je geometrický Brownův pohyb. Položíme $f(t,x) := x_0 \exp\{bx + at - \frac{1}{2}b^2 t\}$ a $X_t = f(t,B_t)$. Je

$$\begin{aligned} f(0,B_0) &= x_0, \\ \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) &= f(t,x) \cdot \left(a - \frac{1}{2}b^2\right), \\ \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) &= f(t,x) \cdot b, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) &= f(t,x) \cdot b^2 \end{aligned}$$

a tedy, dle Itôovy formule a linearity Itôova integrálu, je

$$\begin{aligned} X_t &= x_0 + \int_0^t \left(a - \frac{1}{2}b^2\right) f(s,B_s)\, ds + \int_0^t bf(s,B_s)\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t b^2 f(s,B_s)\, ds \\ &= x_0 + \int_0^t af(s,B_s)\, ds + \int_0^t bf(s,B_s)\, dB_s = x_0 + \int_0^t aX_s\, ds + \int_0^t bX_s\, dB_s \quad \text{s.j.} \end{aligned}$$

4. Geometrický frakcionální Brownův pohyb

V této části zavedeme geometrický frakcionální Brownův pohyb. Tento proces se definuje analogicky jako geometrický Brownův pohyb, tj. jako řešení stochastické diferenciální rovnice. Uveďme nejprve tuto definici.

Definice 23. *Geometrický frakcionální Brownův pohyb je proces* $(X_t, t \in [0,T])$ *splňující rovnici*

$$dX_t = aX_t dt + bX_t dB_t^H, X_0 = x_0$$

na daném intervalu $[0,T]$*, kde* $a, b, x_0 \in \mathbb{R}, b \neq 0$ *jsou dané a* $(B_t^H, t \in [0,T])$ *je frakcionální Brownův pohyb s Hurstovým parametrem* $H \in (0,1)$*, kde pod pojmem „splňující rovnici“ je myšleno, že* X_t *je ve tvaru*

$$X_t = x_0 + \int_0^t aX_s\, ds + \int_0^t bX_s\, dB_s^H,$$

kde první integrál je Lebesgueův a druhý Wickoův-Itôův-Skorokhodův.

Tato stochastická diferenciální rovnice je podobná té, kterou jsme uvažovali při zavedení geometrického Brownova pohybu. Hlavní rozdíl je v typu stochastického integrálu. Nyní bychom se mohli zabývat definicí Wickova-Itôova-Skorokhodova stochastického integrálu, jeho vlastnostmi a časem odvodit tvar řešení rovnice v předchozí definici. Toto však z obtížnostních a prostorových důvodů neuvádíme. Konstrukce včetně odvození tvaru geometrického frakcionálního pohybu lze najít v [5]. Pro nás potřebný výsledek zformulujeme do následující věty:

Věta 23. *Geometrický frakcionální Brownův pohyb je proces tvaru*

$$X_t = x_0 \exp\left\{bB_t^H + at - \frac{1}{2}b^2t^{2H}\right\}, t \in [0,T]$$

Vidíme, že geometrický Brownův pohyb je opět speciálním případem geometrického frakcionálního Brownova pohybu. Nyní se zabývejme vlastnostmi geometrického frakcionálního Brownova pohybu.

Věta 24. *Buď* $(X_t, t \in [0,T])$ *geometrický frakcionální Brownův pohyb. Potom platí:*

i) Pokud je $x_0 > 0$*, tak*

$$\forall t \in [0,T] : X_t \sim LN\left(\log x_0 + at - \frac{1}{2}b^2t^{2H}, b^2t^{2H}\right).$$

Pokud je $x_0 < 0$*, tak* X_t *má rozdělení s hustotou* $f(x) = f_{LN}(-x)$*, kde* f_{LN} *je hustota* $LN(\log(-x_0) + at - \frac{1}{2}b^2t^{2H}, b^2t^{2H})$.

ii) $\forall t \in [0,T] : E[X_t] = x_0 e^{at}$,

iii) $\forall t \in [0,T] : \mathrm{Var}(X_t) = x_0^2\, e^{2at}\left(e^{b^2t^{2H}} - 1\right)$.

Důkaz. Platí, že $Z \sim LN(\mu,\sigma^2) \iff \log Z \sim N(\mu,\sigma^2)$. Dále platí, že pokud $Z \sim LN(\mu,\sigma^2)$, tak

$$E[Z] = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$$

a

$$\mathrm{Var}(Z) = \left(e^{\sigma^2} - 1\right) e^{2\mu+\sigma^2}.$$

i) Pokud je $x_0 > 0$, tak pro každé $t \in [0,T]$ je

$$\log X_t = \log x_0 + bB_t^H + at - \frac{1}{2}b^2t^{2H} \sim N\left(\log x_0 + at - \frac{1}{2}b^2t^{2H}, b^2t^{2H}\right),$$

neboť $B_t^H \sim N(0,t^{2H})$. Tvrzení pro $x_0 < 0$ je triviální.

ii) Pro $x_0 > 0$ plyne z i) a vzorců pro lognormální rozdělení nahoře. Pro $x_0 < 0$ pak plyne z linearity střední hodnoty.

iii) Analogické důvody.

□

4.1 Limitní chování

Nyní odvodíme limitní chování geometrického frakcionálního Brownova pohybu.

Věta 25. *Buď $(X_t, t \geq 0)$ geometrický frakcionální Brownův pohyb. Nechť je $x_0 > 0$. Pak*

1. *Pokud $H = \frac{1}{2}$, pak platí:*
   (a) *pokud $a < \frac{1}{2}b^2$, tak*
   $$\lim_{t\to+\infty} X_t = 0. \quad s.j.$$
   (b) *pokud $a > \frac{1}{2}b^2$, tak*
   $$\lim_{t\to+\infty} X_t = +\infty \quad s.j.$$
   (c) *pokud $a = \frac{1}{2}b^2$, tak*
   $$\limsup_{x\to+\infty} X_t = +\infty \quad s.j. \quad a \quad \liminf_{x\to+\infty} X_t = 0 \quad s.j.$$
2. *Pokud $H > \frac{1}{2}$, pak platí*
   $$\lim_{t\to+\infty} X_t = 0 \quad s.j.$$
3. *Pokud $H < \frac{1}{2}$, pak platí:*
   (a) *pokud $a > 0$, tak*
   $$\lim_{t\to+\infty} X_t = +\infty \quad s.j.$$
   (b) *pokud $a \leq 0$, tak*
   $$\lim_{t\to+\infty} X_t = 0 \quad s.j.$$

Důkaz. Víme, že $X_t = x_0 \exp\left\{bB_t^H + at - \frac{1}{2}b^2t^{2H}\right\}$. Projdeme jednotlivé případy.

1. V tomto případě je $X_t = x_0 \exp\left\{bB_t + at - \frac{1}{2}b^2t\right\}$. Použijeme zákon iterovaného logaritmu pro „obyčejný“ Brownův pohyb:

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log t}} = 1 \quad \text{s.j.} \quad a \quad \liminf_{t\to+\infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log t}} = -1 \quad \text{s.j.} \qquad (*)$$

Je

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log t}} = \lim_{t_0\to+\infty} \sup_{t\geq t_0} \frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log t}}.$$

Buď $\epsilon > 0$. Pak z definice limity existuje t_1, že

$$\forall t_0 \geq t_1 : \sup_{t\geq t_0} \frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log t}} \in \mathcal{U}(1,\epsilon) \text{ s.j.},$$

tedy $\{\frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log t}} : t \geq t_1\}$ je omezená shora skoro jistě. Analogicky najdeme t_2, že $\{\frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log t}} : t \geq t_2\}$ je omezená zdola skoro jistě. Celkem je $\{\frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log t}} : t \geq \max\{t_1,t_2\}\}$ omezená skoro jistě. Dále platí

$$bB_t + at - \frac{1}{2}b^2t = t\left(a - \frac{1}{2}b^2 + b\sqrt{\frac{2}{t}\log\log t}\frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log t}}\right).$$

Výraz v závorce má skoro jistě limitu $a - \frac{1}{2}b^2$, neboť $b\sqrt{\frac{2}{t}\log\log t} \to 0, t \to +\infty$ a $\frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log t}}$ je na okolí nekonečna skoro jistě omezená. Pokud tedy $a < \frac{1}{2}b^2$, tak

$$\lim_{t\to+\infty}\left(bB_t + at - \frac{1}{2}b^2t\right) = -\infty \quad \text{s.j.},$$

což spolu s větou o limitě složené funkce použité na exponenciálu dává první tvrzení (1a) věty. Tvrzení (1b) lze dokázat analogicky. V případě $a = \frac{1}{2}b^2$ je $X_t = x_0 \exp\{bB_t\}$. Je

$$\limsup_{t\to+\infty} x_0 e^{bB_t} = \lim_{t_0\to+\infty} \sup_{t>t_0}\left\{x_0 \exp\left(b\sqrt{2t\log\log t}\frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log t}}\right)\right\}.$$

Z vlastností $\limsup$, $\liminf$ a $(*)$ je

$$\forall t_0 : \inf_{t\geq t_0} \frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log t}} \leq -1 < 1 \leq \sup_{t\geq t_0} \frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log t}} \quad \text{s.j.} \qquad (\text{i})$$

Buď $t_0 > 0$ dané (a dostatečně velké, aby bylo vše následující definované). Vyšetřením průběhu funkce $\sqrt{2t\log\log t}$ se snadno zjistí, že funkce $f(t) := \sqrt{2t\log\log t}$ je rostoucí a

$$\sup_{t\geq t_0} \sqrt{2t\log\log t} = +\infty.$$

Tedy, pro každé $b > 0$ je

$$\sup_{t\geq t_0} b\sqrt{2t\log\log t} = +\infty \qquad (\text{ii})$$

a pro $b < 0$ je

$$\inf_{t \geq t_0} b\sqrt{2t \log\log t} = -\infty. \tag{iii}$$

Ukážeme, že

$$S := \sup_{t \geq t_0} \left(b\sqrt{2t \log\log t} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log\log t}} \right) = +\infty \quad \text{s.j.} \tag{$**$}$$

Pro spor nechť je $S < +\infty$. Nechť je $b > 0$. Z (ii) najdeme $t_1 > t_0$, že $b\sqrt{2t_1 \log\log t_1} > S$. Z (i) najdeme $t_2 > t_1$, že $\frac{B_{t_2}}{\sqrt{2t_2 \log\log t_2}} \geq 1$ s.j. Protože f je rostoucí, je i $b\sqrt{2t_2 \log\log t_2} > S$. Tedy

$$b\sqrt{2t_2 \log\log t_2} \frac{B_{t_2}}{\sqrt{2t_2 \log\log t_2}} > S \quad \text{s.j.}$$

a to je spor. Nechť $b < 0$. Z (ii) najdeme t_1 že $-b\sqrt{2t_1 \log\log t_1} > S$. Z (i) najdeme $t_2 > t_1$, že $\frac{B_{t_2}}{\sqrt{2t_2 \log\log t_2}} \leq -1$ s.j. Protože f je rostoucí a $b < 0$, je i $-b \cdot f$ rostoucí, a tedy je $-b\sqrt{2t_2 \log\log t_2} > S$. Celkem máme

$$b\sqrt{2t_2 \log\log t_2} \frac{B_{t_2}}{\sqrt{2t_2 \log\log t_2}} \geq -b\sqrt{2t_2 \log\log t_2} > S \quad \text{s.j.}$$

a to je opět spor. Protože t_0 bylo libovolné, tak z $(**)$ již plyne

$$\forall t_0 : S_{t_0} := \sup_{t > t_0} \left\{ x_0 \exp\left(b\sqrt{2t \log\log t} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log\log t}} \right) \right\} = +\infty \quad \text{s.j.}$$

a proto i

$$\limsup_{t \to +\infty} X_t = \limsup_{t \to +\infty} x_0 e^{bB_t} = \lim_{t_0 \to +\infty} S_{t_0} = +\infty \quad \text{s.j..}$$

Důkaz pro $\liminf$ je analogický s využitím (iii) místo (ii).

2. V tomto případě je $X_t = x_0 \exp\left\{ bB_t^H + at - \frac{1}{2}b^2 t^{2H} \right\}$ a $H > \frac{1}{2}$. Použijeme zákon iterovaného logaritmu pro frakcionální Brownův pohyb:

$$\limsup_{t \to +\infty} \frac{B_t^H}{t^H \sqrt{2 \log\log t}} = c_H \quad \text{s.j.} \quad \text{a} \quad \liminf_{t \to +\infty} \frac{B_t^H}{t^H \sqrt{2 \log\log t}} = -c_H \quad \text{s.j.}$$

Je

$$\lim_{t \to \infty} X_t =$$
$$= \lim_{t \to \infty} x_0 \exp\left\{ t^{2H} \left(at^{1-2H} - \frac{1}{2}b^2 + b\sqrt{\frac{1}{t^{2H}} 2 \log\log t} \frac{B_t^H}{t^H \sqrt{2 \log\log t}} \right) \right\}.$$

Stejně jako výše je $\frac{B_t^H}{t^H \sqrt{2 \log\log t}}$ omezená na nějakém okolí nekonečna skoro jistě, $b\sqrt{t^{-2H} 2 \log\log t} \to 0$, $t \to +\infty$, a tedy poslední výraz v kulaté závorce má limitu 0 skoro jistě. Limita výrazu v závorce je tedy skoro jistě $-\frac{1}{2}b^2 < 0$. Limita ve složených závorkách je tedy skoro jistě $-\infty$, což už dává výsledek.

3. V tomto případě je $X_t = x_0 \exp\left\{bB_t^H + at - \frac{1}{2}b^2t^{2H}\right\}$ a $H < \frac{1}{2}$. Postup je analogický. Pokud $a \neq 0$, tak

$$\lim_{t\to\infty} X_t =$$
$$= \lim_{t\to\infty} x_0 \exp\left\{t\left(a - \frac{1}{2}b^2t^{2H-1} + bt^{H-1}\sqrt{2\log\log t}\frac{B_t^H}{t^H\sqrt{2\log\log t}}\right)\right\}.$$

Limita výrazu v kulaté závorce je skoro jistě a a tedy limita výrazu ve složené závorce je skoro jistě $\operatorname{sgn}(a)\cdot(+\infty)$ což už dává tvrzení věty. Pokud $a = 0$, tak

$$\lim_{t\to\infty} X_t = \lim_{t\to\infty} x_0 \exp\left\{t^{2H}\left(-\frac{1}{2}b^2 + b\sqrt{\frac{1}{t^{2H}}2\log\log t}\frac{B_t^H}{t^H\sqrt{2\log\log t}}\right)\right\}.$$

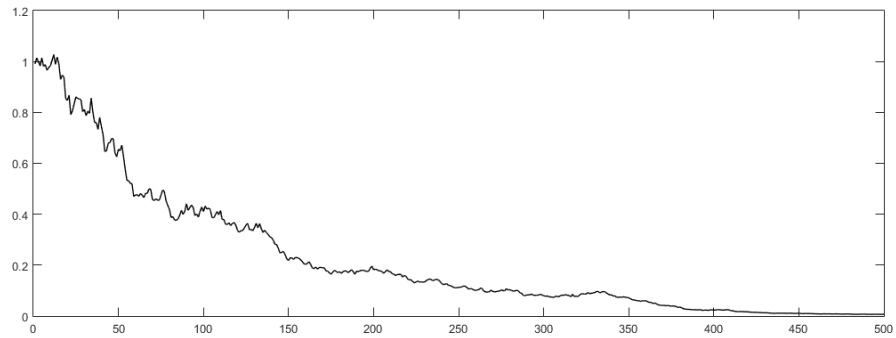
Limita výrazu v kulatých závorkách je skoro jistě $-\frac{1}{2}b^2 < 0$, a tedy opět

$$\lim_{t\to\infty} X_t = 0 \quad \text{s.j.}$$

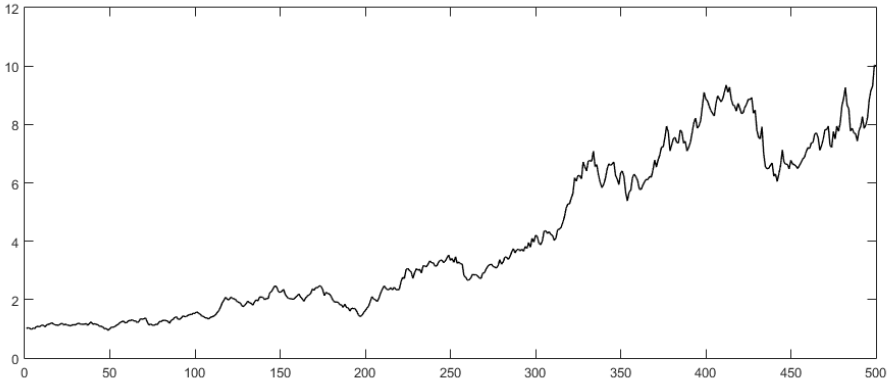
□

Na závěr se podívejme se na simulované trajektorie geometrického frakcionálního pohybu v kontextu předchozí věty. Simulace jsou prováděny v softwaru MATLAB. Použitý algoritmus je Abryův - Sellanův, jehož popis lze najít například v [6].

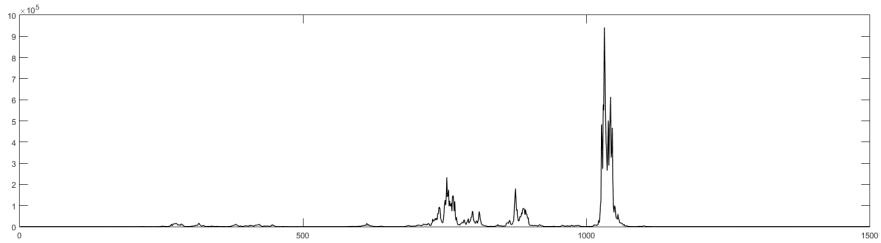
Obrázek 4.1: Situace 1a) s $H = \frac{1}{2}$, $a = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{100}, b = \frac{1}{10}$



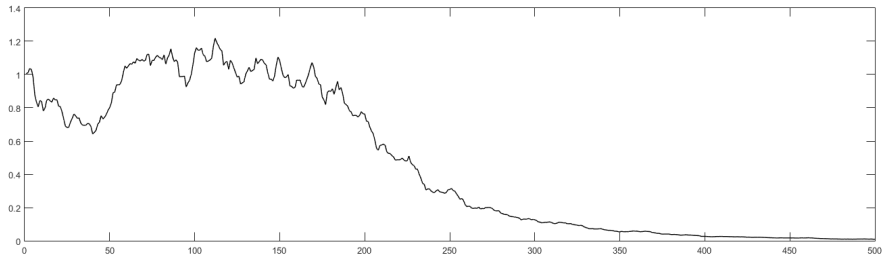
Obrázek 4.2: Situace 1b) s $H = \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{100}, b = \frac{1}{10}$



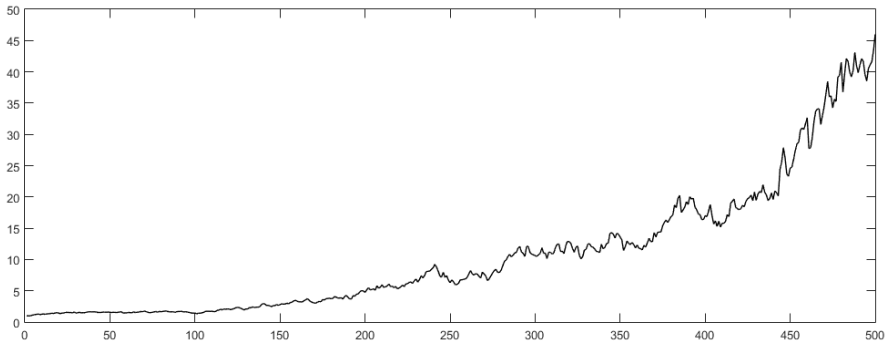
Obrázek 4.3: Situace 1c) s $H = \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{2}, b = 1$



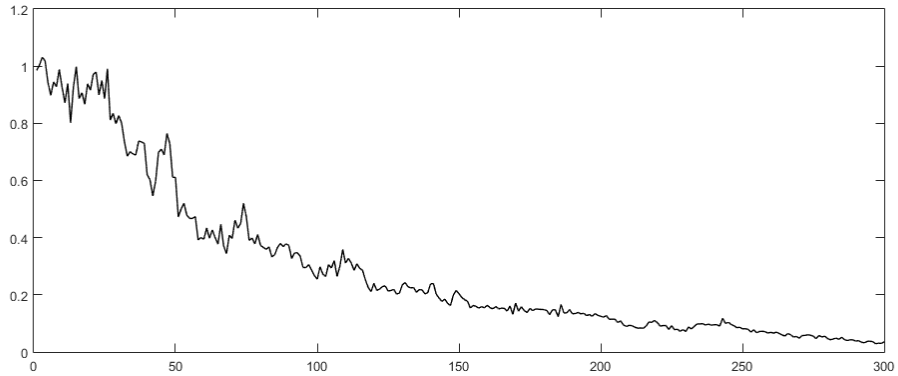
Obrázek 4.4: Situace 2) s $H = 0.6$, $a = \frac{1}{100}, b = \frac{1}{10}$



Obrázek 4.5: Situace 3a) s $H = 0.4$, $a = \frac{1}{100}, b = \frac{1}{10}$



Obrázek 4.6: Situace 3b) s $H = 0.2$, $a = -\frac{1}{100}, b = \frac{1}{10}$



Literatura

[1] Štěpán J., *Teorie Pravděpodobnosti*, Academia, 1987.

[2] Lachout P., *Teorie pravděpodobnosti*, Karolinum, 1905. ISBN 80-7184-730-5

[3] Nourdin I., *Selected Aspects of Fractional Brownian Motion*, Springer - Verlag, Italia, 2012, ISBN 978-8-84702-823-4.

[4] Arcones M. A., *On the law of the iterated logarithm for Gaussian processes*, Journal of Theoretical Probability, 8 (4), 877904, 1995.

[5] Francesca B., Hu Y., Øksendal B., Zhang T., *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications*, Springer - Verlag, London, 2008. ISBN 978-1-84628-797-8

[6] Abry P., Sellan F., *The wavelet-based synthesis for the fractional Brownian motion proposed by F. Sellan and Y. Meyer: Remarks and fast implementation*, Appl. Comput. Harm. Anal. 3 (4) 377–383, 1996.

[7] Karal D., *Stochastické integrály*, Bakalářská práce, MFF UK, 2014.

[8] Kuo H., *Introduction to Stochastic Integration*, Springer Science+Business Media, Inc., 2006.