MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Tomáš Bureček

Trh prodavačů novin

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky MFF UK

Vedoucí bakalářské práce:	doc. RNDr. Petr Lachout, CSc.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2017

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne ..... Podpis autora

Chtěl bych poděkovat panu doc. RNDr. Petru Lachoutovi, CSc. za vedení mé bakalářské práce, odborný dohled a cenné rady, které mi pomohly při zpracování tohoto textu.

Název práce: Trh prodavačů novin

Autor: Tomáš Bureček

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky MFF UK

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Petr Lachout, CSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky MFF UK

Abstrakt: Tato práce řeší úlohu prodavače novin, která zapadá do klasických úloh stochastického programování. Práce obsahuje rozšíření na trh prodejců novin a uvažuje také různé vlivy, které prodavače můžou postihnout. Je uvažována spojitá verze úlohy. Úkolem je najít optimální množství produktu, které má prodejce nakoupit, aby maximalizoval svůj výdělek. V práci je diskutována problematika řešení tohoto problému. Nejprve je problém demonstrován na jednodušší verzi a později je tento problém rozvinut. Nakonec je nalezen iterační algoritmus, který spočte aproximované řešení a jeho funkčnost je demonstrována na příkladu.

Klíčová slova: Úloha stochastické optimalizace, Úloha prodavače novin, Nashova rovnováha

Title: Market of newsboys

Author: Tomáš Bureček

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics , Charles University

Supervisor: doc. RNDr. Petr Lachout, CSc., Department of Probability and Mathematical Statistics , Charles University

Abstract: This thesis solves the task of a newspaper vendor, which fits into the classical tasks of stochastic programming. The work includes an extension to the market of newsboys and also considers various influences that vendors may suffer. A continuous version of the problem is considered. The task is to find the optimal amount of product the buyer can buy to maximize his yield. The thesis discusses the issue of solving this problem. First, the problem is demonstrated in a easier version, and later this problem is developed. Finally, we find an iterative algorithm that calculates the approximate solution and demonstrates its functionality on an example.

Keywords: Stochastic optimization program, Newsboy problem, Nash equilibrium

Obsah

Úvod **2**

1 Jednoduchý problém **4**

2 Složitější problém a Nashova rovnováha **8**
2.1 Skutečná poptávka a očekávaný výdělek 9
2.2 Analýza rovnováhy 9

3 Aproximace a iterační algoritmus **13**
3.1 Aproximace 13
3.2 Iterační algoritmus 13
3.3 Programátorská část 14
3.4 Numerický příklad 14

4 Závěr **17**

Seznam použité literatury **18**

Seznam tabulek **19**

Úvod

Úloha prodavače novin, která spočívá v nalezení optimálního množství nakoupení produktu s náhodnou poptávkou, aby maximalizovala očekávaný výdělek za určitou periodu, se začala studovat na konci 20. století. Je to standardní problém objevující se v různých ekonomických a manažerských textech. Tento problém byl pojmenovaný po pouličních prodavačích novin, kteří ráno nakoupili v tiskárně noviny a v průběhu dne je prodávali zákazníkům. Cílem úlohy je maximalizovat výdělek prodavače. V prvních textech se objevuje problém pouze jednoho prodavače. Nalezne se optimální množství, které by měl nakoupit a podle dalších faktorů se přidávají váhy k tomuto množství. Faktory mohou být počasí (v deštivé dny bude chodit méně zákazníků), místo prodeje (v malé uličce na kraji města bude menší poptávka než na náměstí), anebo den prodeje (mnoho lidí nakupuje přes týden a o víkendu nenakupují). Tomuto problému se věnuje například článek Casimira [1]. V dnešní době již prodavači z ulic téměř vymizeli, ale problém si udržel svůj název a začal se rozvíjet pro širší použití. Úloha se již neformuluje pro diskrétní systém (noviny), ale pro spojité systémy. Do problému se přidávají další proměnné, které ovlivňují maximální výdělek. Tyto proměnné jsou například sběrní hodnota (množství produktu, které se neprodá v den prodeje, neztrácí úplnou hodnotu, ale prodá se do sběru) nebo penalizace (prodavač, aby neztratil neuspokojenou poptávku, zaplatí poplatek).

V úloze prodavače novin se často předpokládá, že v případě nedostatku zboží je neuspokojená poptávka ztracena. Nicméně produkty stejného typu, např. tvar, barva, velikost, mohou být zaměněny. V tomto případě můžeme úlohu rozdělit na dva typy:

1. Firmou řízené výměny.

2. Zákazníky řízené výměny.

Firmou řízené výměny předpokládají, že všechny produkty jsou tříděny do určitých úrovní a jen produkty z výších úrovní můžou být vyměněny za ty z nižších úrovní. Firmou řízená výměna také znamená, že dodavatel dělá rozhodnutí pro zákazníky, které produkty mohou zaměnit. Zákazníky řízené výměny znamenají, že si zákazník sám rozhodne, zda chce svůj chtěný produkt vyměnit za jiný. Náš problém se více podobá zákazníkem řízené výměně. Zákazník, který u svého prodavače nemůže nakoupit požadované množství produktu, se rozhodne, zda navštíví jiný stánek nebo odejde s prázdnou.

Zákazníky řízené výměny se ještě dále rozdělují na dvě kategorie. V první kategorii zákazníci přicházejí ke stánkům podle náhodného procesu a sami si vybírají výměny podle užitečnosti nebo výdělku. Ve druhé kategorii je každý produkt vyměnitelný za jiný s určitou pravděpodobností záměny. Náhodná poptávka poté určuje množství produktu, který by si měl každý prodejce nakoupit. Prodejci si tímto mezi sebou ovlivňují maximální výdělky a vzniká nám tímto určitá „hra". V tomto textu budeme nejprve uvažovat jednoho prodejce, na kterém ukážeme základní principy a poté budeme uvažovat složitější model s více prodejci, kteří prodávají stejný produkt. Budeme také uvažovat spojitý systém a za periodu, během které prodavači prodávají produkt, budeme uvažovat den. Řešením bude

vektor množství produktu, které by měl každý prodejce nakoupit, aby měl maximální výdělek. Na konci teoretické části si ukážeme, že ve složitějším problému existuje Nashova rovnováha a nalezneme určité vlastnosti. V druhé části textu nalezneme iterační algoritmus, který nalezne aproximované řešení našeho problému a ukážeme jeho použitelnost na numerickém příkladě.

1. Jednoduchý problém

V prvním oddíle se budeme zabývat nejjednodušší verzí problému. Zformulujme si nyní náš problém:

Mějme pouze jednoho prodavače, jehož úkolem je maximalizovat výdělek z prodeje produktu během dne. Prodavač si na začátku dne nakoupí množství produktu, které během dne prodává. Na konci dne neprodaný produkt ztrácí celou svoji hodnotu. Předpokládejme také, že prodavač nemusí platit penalizaci za neprodaný produkt.

Definujme si tedy potřebné proměnné:

- r.....prodejní cena
- c.....nákupní cena
- Q.....množství nakoupeného produktu
- X.....poptávka.

V definici r, c a Q jsou deterministické X je spojitá náhodná veličina s distribuční funkcí F_X a hustotou f_X. Pro jednoduchost předpokládejme, že F_X je ryze rostoucí. Dále platí $0 < c < r$, jinak by model neměl smysl. Definujme si nyní funkci očekávaného výdělku:

$$\pi(Q) = \boldsymbol{E}[r \min(Q,X) - cQ] \tag{1.1}$$

První člen odpovídá zisku z prodeje, druhý člen označuje cenu nákupu. Nyní se pokusíme najít řešení problému. Uvědomme si, že prodavač ovlivňuje pouze množství nakoupeného produktu. Nejprve si připomeneme, co znamená pro funkci, že je konkávní na intervalu:

Definice 1. *Řekneme, že funkce $f : I \to \boldsymbol{R}$ je konkávní, jestliže:*

$$\forall x, y \in I, x \neq y, \forall \lambda \in (0,1) : f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

A vyslovíme postačující podmínku pro konkávitu, kterou použijeme později:

Lemma 1. *Nechť f: $I \to \boldsymbol{R}$. Jestliže $f''(x) \leq 0$ $\forall x \in I$, pak f je konkávní.*

Důkaz. Z $f''(x) \leq 0$, $\forall x \in I$ víme, že $f'(x)$ je nerostoucí. Vezměme si libovolné x_1, x_2 a x_3, že $x_1 < x_2 < x_3$. Z Lagrangeovy věty víme, že existují $c \in (x_1,x_2)$ a $d \in (x_2,x_3)$ takové, že:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \text{ a } \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(d).$$

Z f' nerostoucí dostaneme $f'(c) \geq f'(d)$, tedy:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}. \tag{1.2}$$

Označme si $\lambda = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$. Potom $1 - \lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$ a $x_2 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_3$. Definujme $k := \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_3)$. Přímým výpočtem dostaneme:

$$\frac{k - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} = \frac{f(x_3) - k}{x_3 - x_2}$$

Odtud a z (1.2) plyne, že $f(x_2) \geq k$ a tedy:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_3) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_3).$$

Máme tedy z definice konkávnost f.

□

Dále budeme potřebovat následující lemma.

Lemma 2. *V našem modelu platí:*

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}[(X - Q)^+]}{\partial Q} = -P(X > Q), \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}[(Q - X)^+]}{\partial Q} = P(X < Q). \tag{1.4}$$

Důkaz. Lemma dokážeme z definice derivace:

$$\frac{\boldsymbol{E}[(X - Q - h)^+] - \boldsymbol{E}[(X - Q)^+]}{h} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x - Q - h)^+ - (x - Q)^+}{h} f_X(x) dx$$

Integrál si rozdělíme na tři intervaly, které následně řešíme. Na intervalu $(-\infty, Q)$ jsou obě kladné části nulové, tedy platí:

$$\int_{-\infty}^{Q} \frac{(x - Q - h)^+ - (x - Q)^+}{h} f_X(x) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{Q} \frac{0 - 0}{h} f_X(x) dx = 0$$

Na intervalu $(Q, Q + h)$ je jedna kladná část nulová a na druhou aplikujeme odhad $(x - Q) \leq h$ pro $x \in (Q, Q + h)$:

$$\int_{Q}^{Q+h} \frac{(x - Q - h)^+ - (x - Q)^+}{h} f_X(x) dx =$$

$$= \int_Q^{Q+h} \frac{(x-Q)}{h} f_X(x)dx \leq \int_Q^{Q+h} \frac{h}{h} f_X(x)dx = \int_Q^{Q+h} f_X(x)dx \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

Na intervalu $(Q+h, \infty)$ jsou obě kladné části nenulové a tedy dostaneme:

$$\int_{Q+h}^{\infty} \frac{(x-Q-h)^+ - (x-Q)^+}{h} f_X(x)dx =$$

$$= \int_{Q+h}^{\infty} -\frac{h}{h} f_X(x)dx = -\int_{Q+h}^{\infty} f_X(x)dx =$$

$$= -(1-F(Q+h)) \xrightarrow[h\to 0]{} -(1-F(Q)) = -P(X>Q).$$

V limitním přechodu jsme použili spojitost distribuční funkce.

Celkově tedy dostáváme:

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}[(X-Q)^+]}{\partial Q} = \lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{E}[(X-Q-h)^+] - \boldsymbol{E}[(X-Q)^+]}{h} = -P(X>Q)$$

Obdobně se ukáže druhý vzorec.

□

Věta 3. *Množství produktu, které by měl prodavač koupit na začátku dne, aby měl maximální očekávaný výdělek splňuje:*

$$P(X<Q) = \frac{r-c}{r}.$$

Funkce očekávaného výdělku je konkávní v množství nakoupeného produktu.

Důkaz. Vyjdeme ze vzorce očekávaného výdělku a následně upravujeme:

$$\pi(Q) = \boldsymbol{E}[r\min(Q,X) - cQ] =$$

$$= \boldsymbol{E}[r(X-(X-Q)^+) - cQ + cX - cX] =$$

$$= \boldsymbol{E}[rX - r(X-Q)^+ + c(X-Q) - cX] =$$

$$= \boldsymbol{E}[(r-c)X - r(X-Q)^+ + c(X-Q)^+ - c(Q-X)^+] =$$

$$= \boldsymbol{E}[(r-c)X - (r-c)(X-Q)^+ - c(Q-X)^+].$$

Nyní zderivujeme podle Q a podle Lemma 2 dostaneme:

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q}(Q) = (r-c)P(X>Q) - cP(X<Q) =$$

$$= (r-c)(1-P(X<Q)) - cP(X<Q) =$$

$$= (r-c) - rP(X<Q).$$

Položíme derivaci rovnu nule a dostaneme:

$$P(X<Q) = \frac{r-c}{r}.$$

Zderivujeme podruhé podle Q:

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q^2}(Q) = -rf_X(Q)$$

Neboť $r > 0$ a hustota je nezáporná, z Lemma 1 dostáváme znění věty.

□

Definujme si ještě kvantilovou funkci, kterou použijeme pro výpočet optimálního množství produktu.

Definice 2. *Nechť F_X je distribuční funkce nějaké náhodné veličiny X. Pro $\alpha \in$ (0,1) definujeme kvantilovou funkci $F_X^{-1}(\alpha) := inf(x : F_X(x) \geq \alpha)$.*

V našem modelu předpokládáme spojitou a ryze rostoucí distribuční funkci, tedy $F_X(x) = \alpha$ platí právě tehdy, když $x = F_X^{-1}(\alpha)$.

Nyní již můžeme udělat závěr této části. Úloha jednoho prodavače má jednoznačně určené optimální řešení, označme je Q^{opt}. Jedná se a množství produktu, které by měl prodavač koupit na začátku periody, aby měl maximální očekávaný výdělek. Toto řešení je určeno jako kvantil:

$$Q^{opt} = F_X^{-1}\left(\frac{r-c}{r}\right).$$

Vzorec je dobře definovaný, neboť $r > c$, tedy $0 < \frac{r-c}{r} < 1$.

2. Složitější problém a Nashova rovnováha

Nyní se začneme zabývat složitější úlohou. Zavedeme si tedy problém:

Uvažujme n prodavačů. Každý si na začátku dne nakoupí určité množství produktu, které během dne prodává. Na konci dne všechen neprodaný produkt neztrácí hodnotu, ale prodá se za menší výdělek do sběru. Uvažujme také, že firma nebo jednotlivec (dále jen zákazník), který si chce koupit nějaké množství produktu, má svůj oblíbený stánek. K tomuto stánku chodí každý den. Jestliže prodavač nemůže uspokojit zákazníka, jelikož nemá dané množství produktu, zaplatí zákazníkovi určitou penalizaci. Penalizace může být ve formě nákladů za cestu, kterou musel zákazník vynaložit i přes to, že nebyl uspokojen nebo například jako úplatek, aby zákazník přišel i další den. Pokud zákazník nenajde chtěné množství produktu u svého prodavače, má dvě možnosti. Buď si ten den nemusí koupit produkt nebo může zkusit dalšího prodavače. Druhé situaci budeme říkat záměna prodavačů. Cílem každého prodavače je maximalizovat svůj zisk z prodeje produktu.

Definujme si nyní všechny potřebné proměnné pro každého prodavače. Pro všechna $i, j \in \{1, ..., n\}$:

- r_i.....prodejní cena
- c_i.....nákupní cena
- s_i.....sběrní hodnota
- p_i.....penalizace
- Q_i.....množství nakoupeného produktu
- X_i.....poptávka
- a_{ij}.....poměr záměny i-tého za j-tého prodavače.

Na úlohu klademe následující předpoklady:

1. $0 \leq a_{ij} \leq 1$ pro všechna $i, j = 1, 2,...,n$, $i \neq j$,
2. $a_{ii} = 0$ pro všechna $i = 1, 2,...,n$,
3. $0 \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leq 1$ pro všechna $i = 1, 2,...,n$,
4. $r_i > c_i > s_i$ pro všechna $i = 1, 2,...,n$,
5. $X_i, i \in 1..n$ jsou nezávislé, spojité náhodné veličiny s distribučními funkcemi F_{X_i} a hustotami f_{X_i},

6. $X_i \leq \Delta < \infty$ pro všechna $i = 1, 2,...,n$,

7. F_{X_i} je ryze rostoucí na intervalu $(0,\Delta)$ pro každé $i = 1, 2,...,n$.

První a druhý předpoklad znamená, že poměr je vždy nezáporný mezi nulou a jedničkou. Třetí znamená, že součet poměrů záměny i-tého přes všechny j-té prodavače je menší nebo roven jedné. To znamená, že ne všichni zákazníci by si koupili produkt u jiného prodavače. Další nerovnosti jsou podobné těm, které se nachází v první části. Přidaná je pouze sběrní hodnota, která by měla být menší než nákupní cena, jinak by úloha neměla smysl. Předposlední předpoklad znamená, že poptávka je shora omezená nějakým číslem Δ.

2.1 Skutečná poptávka a očekávaný výdělek

Předpokládáme, že nakupující můžou zaměnit svého prodavače za jiného, definujme si nyní novou, efektivní poptávku pro i-tého prodavače jako X_i^e:

$$X_i^e = X_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ji}(X_j - Q_j)^+$$

První člen je očekávaná poptávka lidí, kteří nakupují přímo u i-tého prodavače, druhý člen označuje, že pokud nakupující u svého j-tého prodavače nemůže koupit chtěné množství produktu, pak s nějakým poměrem záměny dojde za i-tým prodavačem.

Definujme pro každé $i \in \{1,...,n\}$ funkci očekávaného výdělku:

$$\pi_i(Q) = \boldsymbol{E}[r_i \min(Q_i, X_i^e) - c_i Q_i + s_i(Q_i - X_i^e)^+ - p_i(X_i^e - Q_i)^+]$$

První člen je příjem z prodeje produktu, druhý je nákupní cena, třetí je bonus za sběr a čtvrtý člen je penalizace za neuspokojené zákazníky. Budeme se zabývat maximalizací této funkce. Jediný prvek, který může i-tý prodavač ovlivnit, je množství nakoupeného produktu Q_i.

2.2 Analýza rovnováhy

Obdobně jako v první části ukážeme, že funkce očekávaného výdělku je konkávní v množství nakoupeného produktu:

Věta 4. *Pro každé $i \in \{1,...,n\}$ je funkce očekávaného výdělku π_i konkávní v množství nakoupeného produktu Q_i.*

Důkaz. Vyjdeme ze vzorce očekávaného výdělku a stejným postupem jako ve Větě 3 upravíme:

$$\pi_i(Q) = \boldsymbol{E}[r_i \min(Q_i, X_i^e) - c_i Q_i + s_i(Q_i - X_i^e)^+ - p_i(X_i^e - Q_i)^+] =$$

$$= \boldsymbol{E}[(r_i - c_i)X_i^e - (r_i - c_i + p_i)(X_i^e - Q_i)^+ - (c_i - s_i)(Q_i - X_i^e)^+]$$

Nyní zderivujeme a díky Lemma 2 obdržíme:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial Q_i}(Q) = (r_i - c_i + p_i)P(X_i^e > Q_i) - (c_i - s_i)P(X_i^e < Q_i) =$$

$$= (r_i - c_i + p_i) - (r_i - s_i + p_i)P(X_i^e < Q_i)$$

Vezměme druhou derivaci a dostaneme vzorec:

$$\frac{\partial^2 \pi_i}{\partial Q_i^2}(Q) = -(r_i - s_i + p_i)f_{X_i^e}(Q_i)$$

A tím je důkaz věty proveden.

□

Konkávita π_i nám dává, že existuje Nashova rovnováha odvozená z první derivace funkce π_i podle Q_i. Celý důkaz existence bude uveden později. Nyní si dokážeme nezbytné podmínky optimality Nashovy rovnováhy.

Věta 5. *Strategie Nashovy rovnováhy splňuje následující podmínky optimality:*

$$P(X_i^e < Q_i^*) = \frac{r_i - c_i + p_i}{r_i - s_i + p_i}, i = 1,2,...,n, \tag{2.1}$$

kde Q_i^* je optimální množství nakoupeného produktu.

Důkaz. Pro každé $i \in \{1,...,n\}$ vezměme první derivaci očekávaného výdělku z předchozího důkazu a položíme rovno 0:

$$0 = \frac{\partial \pi_i}{\partial Q_i}(Q_i) = (r_i - c_i + p_i) - (r_i - s_i + p_i)P(X_i^e < Q_i).$$

Odtud již úpravou dostaneme znění věty:

$$P(X_i^e < Q_i^*) = \frac{r_i - c_i + p_i}{r_i - s_i + p_i}$$

□

Definujme si nyní, co znamená pro funkci, že je supermodulární a úplný svaz částečně uspořádané množiny.

Definice 3. *Funkce $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazveme supermodulární, jestliže platí:*

$$\rho(\max(Q_1^1,Q_1^2),..., \max(Q_n^1,Q_n^2)) + \rho(\min(Q_1^1,Q_1^2),... \min(Q_n^1,Q_n^2)) \geq \rho(\boldsymbol{Q}^1) + \rho(\boldsymbol{Q}^2),$$

pro každé $\boldsymbol{Q}^1, \boldsymbol{Q}^2 \in \mathbb{R}^n$ takové, že $\boldsymbol{Q}^1 = (Q_1^1,...,Q_n^1)$ a $\boldsymbol{Q}^2 = (Q_1^2,...,Q_n^2)$.

Definice 4. *Úplným svazem nazveme částečně uspořádanou množinu $(X,\leq)$, ve které existují suprema i infima všech podmnožin.*

Nyní se dostaneme k hlavní větě této práce a to k existenci Nashovy rovnováhy. Jinak řečeno, v našem problému existuje určitý element hry, že prodavači si navzájem ovlivňují maximální výdělky.

Věta 6. *V našem modelu existuje Nashova rovnováha.*

Celý důkaz je uveden v článku Huanga a kol. [2]. My si větu dokážeme pouze pro $n = 2$.

Důkaz. Důkaz je převzat ze článku Lippmana a McCardla [3]. Existence nám plyne ze spojitosti, úplného svazu a supermodularity funkce očekávaného výdělku. Toto tvrzení je dokázáno v textu Vivese [6]. Nechť π_1 a π_2 jsou funkce očekávaného výdělku prvního a druhého prodavače a množství produktu, které mohou prodavači nakoupit je v intervalu $[0,\hat{Q}_1]$ a $[0,\hat{Q}_2]$, kde $\hat{Q}_1 = \inf\{Q : P(X_1 \leq Q) \geq \frac{r_1-c_1+p_1}{r_1-s_1+p_1}\} < +\infty$ a $\hat{Q}_2 = \inf\{Q : P(X_2 \leq Q) \geq \frac{r_2-c_2+p_2}{r_2-s_2+p_2}\} < +\infty$. Předpokládejme, že množství nakoupeného produktu prvního prodavače je Q_1 a druhého prodavače $R_2 = -Q_2$, což je nekladné číslo. Toto předefinování je použito v článku Lippmana a McCardla [3] a je pouze pro matematické účely, množství produktu se tímto nezmění. Ve výsledku si druhý prodavač zvolí množství $Q_2 = -R_2$. Uvažujeme, že definiční obory funkcí jsou nyní v intervalech $[0,\hat{Q}_1]$ a $[-\hat{Q}_2,0]$, což je úplný svaz. Funkce očekávaného výdělku jsou předefinovány následovně:

$$\hat{\pi}_1(Q_1,R_2) = \boldsymbol{E}[r_1 \min(X_1^e, Q_1) - c_1 Q_1 + s_1(Q_1 - X_1^e)^+ - p_1(X_1^e - Q_1)^+],$$

kde $X_1^e = X_1 + a_{12}(X_2 + R_2)^+$ a

$$\hat{\pi}_2(Q_1,R_2) = \boldsymbol{E}[r_2 \min(X_2^e, -R_2) + c_2 R_2 + s_2(-R_2 - X_2^e)^+ - p_1(X_2^e + R_2)^+],$$

kde $X_2^e = X_2 + a_{21}(X_1 - Q_1)^+$.

Dokážeme spojitost. Nechť (Q_1^k,R_2^k) jsou takové body, že $\lim_{k\to\infty}(Q_1^k,R_2^k) = (Q_1,R_2)$. Potom:

$$\lim_{k\to\infty} \hat{\pi}_1(Q_1^k,R_2^k) = \\ = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{E}[r_1 \min(X_1^e, Q_1^k) - c_1 Q_1^k + s_1(Q_1^k - X_1^e)^+ - p_1(X_1^e - Q_1^k)^+]$$

Víme, že $\min(X_1^e, Q_1^k) \leq \hat{Q}_1$, $(Q_1^k - X_1^e)^+ \leq \hat{Q}_1$ a $(X_1^e - Q_1^k)^+ \leq 2\Delta$. Také víme, že $\lim_{k\to\infty} \min(X_1^e(\omega), Q_1^k) = \min(X_1^e(\omega)), Q_1)$, $\lim_{k\to\infty}(Q_1^k - X_1^e(\omega))^+ = (Q_1 - X_1^e(\omega))^+$ a $\lim_{k\to\infty}(X_1^e(\omega) - Q_1^k)^+ = (X_1^e(\omega) - Q_1)^+$ pro každý bod ω. Po záměně limity a integrálu dostaneme $\lim_{k\to\infty} \hat{\pi}_1(Q_1^k,R_2^k) = \hat{\pi}_1(Q_1,R_2)$. Odtud plyne spojitost $\hat{\pi}_1(Q_1,R_2)$, stejně se udělá $\hat{\pi}_2$.

Nyní dokáže supermodularitu. Přepíšeme si funkce $\hat{\pi}_1(Q_1,R_2)$ a $\hat{\pi}_2(Q_1,R_2)$ následovně:

$$\hat{\pi}_1(Q_1,R_2) = \boldsymbol{E}[(r_1 - s_1 + p_1) \min(X_1^e, Q_1) - (c_1 - s_1)Q_1 - p_1 X_1^e],$$

$$\hat{\pi}_2(Q_1,R_2) = \boldsymbol{E}[(r_2 - s_2 + p_2) \min(X_2^e, -R_2) + (c_2 - s_2)R_2 - p_2 X_2^e].$$

Vycházíme z toho, že platí $\hat{\pi}_1(Q_{1_1},R_2) - \hat{\pi}_1(Q_{1_2},R_2)$ neklesající v R_2 pro $Q_{1_1} \geq Q_{1_2}$ právě tehdy, když $\hat{\pi}_1$ je supermodulární. Tato vlastnost se nazývá rostoucí diference a ekvivalence je dokázaná v knížce Simchi-Leviho a kol. [5] kapitola

druhá Convexity and Supermodularity. Nyní si zafixujeme $Q_{1_1} \geq Q_{1_2}$. Máme následující rovnost:

$$\hat{\pi_1}(Q_{1_1},R_2) - \hat{\pi_1}(Q_{1_2},R_2) = \\ \boldsymbol{E}\{(r_1 - s_1 + p_1)[\min(X_1^e, Q_{1_1}) - \min(X_1^e, Q_{1_2})] - (c_1 - s_1)(Q_{1_1} - Q_{1_2})\}.$$

Jelikož je X_1^e rostoucí pro R_2 rostoucí a rozdíl minim je neklesající v X_1^e, tedy i celý rozdíl $\hat{\pi_1}(Q_{1_1},R_2) - \hat{\pi_1}(Q_{1_2},R_2)$ je neklesající a máme tedy supermodularitu funkce $\hat{\pi_1}$. Supermodularita funkce $\hat{\pi_2}$ se dokáže obdobně.

Dokázali jsme tedy všechny potřebné předpoklady pro existenci rovnováhy.

□

V článku Netessineho a Rudiho [4] je dokázáno, že za předpokladu $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leq 1$ pro všechna $i = 1, 2,...,n$ nebo $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1$ pro všechna $j = 1, 2,...,n$, potom je rovnováha právě jedna. V důkazu se použije, že systém funkcí očekávaného výdělku splňuje Banachovu větu o kontrakci, tedy existuje jeden pevný bod a ten je právě řešením našeho problému.

Na závěr si ukážeme jednu vlastnost rovnováhy a to, že optimální množství nakoupeného produktu každého prodavače je omezené shora i zdola.

Věta 7. *Pro $i \in \{1,..,n\}$ má optimální množství nakoupeného produktu i-tého prodavače dolní mez $\underline{Q_i}$ a horní mez $\overline{Q_i}$.*

Důkaz. Optimální množství nakoupeného produktu dosáhne dolní meze $\underline{Q_i}$, jestliže $Q_j \to +\infty$ pro j-tého prodavače, $j \neq i$ ve vzorci (2.1). Tedy dostaneme, že $X_i^e = X_i$ a hodnotu dolní meze dostaneme vyřešením:

$$P(X_i < \underline{Q_i}) = \frac{r_i - c_i + p_i}{r_i - s_i + p_i},$$

Optimální množství nakoupeného produktu dosáhne horní meze $\overline{Q_i}$, jestliže $Q_j = 0$ pro j-tého prodavače, $j \neq i$ ve vzorci (2.1). Tedy dostaneme:

$$P(X_i^e < \overline{Q_i}) = \frac{r_i - c_i + p_i}{r_i - s_i + p_i},$$

kde $X_i^e = X_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ji} X_j$.

□

3. Aproximace a iterační algoritmus

V této sekci budeme odhadovat funkci efektivní poptávky pro každého prodavače. Nejprve si aproximujeme efektivní poptávku a následně vytvoříme algoritmus, který nám spočte přibližné řešení. Aproximace i algoritmus jsou převzaty z článku Huanga a kol. [2]. V článku Huanga a kol. [2] testují algoritmus pro různé poměry záměn. Dále pro data z normálního rozdělení testují závislost, jak korelace mezi poptávkami ovlivní množství, které by měl každý prodavač nakoupit. V naší práci si vyzkoušíme algoritmus pro různé poptávky z rovnoměrného rozdělení, vypočteme přibližné množství, které by měl každý prodejce nakoupit a zjistíme jejich výdělky.

3.1 Aproximace

Pro odhad podílů náhodných veličin použijeme podíl středních hodnot.

$$X_i^e = X_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ji}(X_j - Q_j)^+ = X_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ji}(X_j - \min(X_j,Q_j)) = X_i +$$

$$+ \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ji}X_j \left(1 - \frac{\min(X_j,Q_j)}{X_j}\right) \approx X_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ji}X_j \left(1 - \frac{\boldsymbol{E}\min(X_j,Q_j)}{\boldsymbol{E}X_j}\right) =: \hat{X}_i^e$$

Střední hodnoty, které jsme použili v odhadu počítáme v algoritmu přímo z rozdělení. Nyní zaměníme náš odhad $\hat{X}_i^e$ za X_i^e ve funkci očekávaného výdělku i-tého prodavače, takže:

$$\pi_i \approx \hat{\pi}_i := \boldsymbol{E}[r_i \min(Q_i,\hat{X}_i^e) - c_iQ_i + s_i(Q_i - \hat{X}_i^e)^+ - p_i(\hat{X}_i^e - Q_i)^+]$$

Obdobně jako ve Větě 4 se dá dokázat, že $\hat{\pi}_i$ je konkávní v Q_i. Vezmeme-li první derivaci funkce $\hat{\pi}_i$ vzhledem ke Q_i, optimální řešení, které maximalizuje výdělek je dáno jako:

$$P(\hat{X}_i^e < Q_i) = \frac{r_i - c_i + p_i}{r_i - s_i + p_i}, i = 1,2,...,n$$

3.2 Iterační algoritmus

Nyní vytvoříme algoritmus, který nám spočte přibližné řešení aproximované funkce očekávaného výdělku. Algoritmus bude vylepšovat řešení, dokud nedojde k námi zvolené úrovni přesnosti. Nejprve zvolíme počáteční vektor množství nakoupeného produktu a přesnost. Vytvoříme dva cykly vnořené do sebe. Ve vnitřním cyklu nahrazujeme ve vektoru množství nakoupeného produktu pomocí inverzní distribuční funkce z podmínky ve Větě 5. Ve vnějším cyklu se díváme na absolutní hodnotu rozdílu množství nakoupeného produktu při nahrazování z

vnitřního cyklu a pokud je pro všechny hodnoty vektoru menší než úroveň přesnosti, tak cyklus skončí. Výsledný vektor nám udává přibližné množství produktu, které by měl každý prodavač nakoupit. Musíme zdůraznit, že výsledný vektor není optimální, ale je to pouze určitá aproximace kontrolovaná naší přesností.

3.3 Programátorská část

Pseudokód algoritmu, který se použije v softwaru vypadá následovně:

1. Vytvoříme počáteční vektor množství produktu Q_i^0 takový, že pro každé i je $Q_i^0 = F_{X_i}^{-1}(\frac{r_i - c_i + p_i}{r_i - s_i + p_i}), i = 1,2,..,n$, kde $F_{X_i}^{-1}$ je inverzní distribuční funkce k X_i. Máme tedy počáteční vektor $(Q_1^0,Q_2^0,...,Q_n^0)$.
2. Zvolíme úroveň přesnosti α a položíme $k = 1$.
3. Položíme $i = 1$
4. Pro i-tého prodavače v k-té iteraci vypočteme množství produktu Q_i^k jako $Q_i^k = F_{\hat{X}_i^e}^{-1}(\frac{r_i - c_i + p_i}{r_i - s_i + p_i})$, kde $\hat{X}_i^e = X_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ji} X_j (1 - \frac{\boldsymbol{E} \min(X_j, Q_j^{k-1})}{\boldsymbol{E} X_j})$ a ve vektoru nahradíme Q_i^{k-1} za Q_i^k.
5. Pokud $i < n$, pak $i := i + 1$ a vrátíme se ke kroku 4.
6. Zkontrolujeme zda $|Q_i^k - Q_i^{k-1}| \leq \alpha$ pro každé $i = 1,..,n$. Pokud není splněna podmínka, vrátíme se ke kroku 3. Jinak skončíme algoritmus.
7. Q_i ve výsledném vektoru je aproximované množství produktu, které by měl nakoupit i-tý prodavač.

3.4 Numerický příklad

Numerický příklad bude počítán v programu R. Hodnoty v tomto textu jsou vypsány na 4 desetinné místa bez zaokrouhlení. Náš algoritmus si vyzkoušíme pro dva prodavače a pro poptávku z rovnoměrného rozdělení. Nejprve si vygenerujeme potřebné proměnné a poté pro pět různých poptávek dostaneme řešení úlohy.

- r_i generujeme z $R(500,1500)$,
- pro dané r_i, c_i generujeme z $R(0.5r_i, 0.7r_i)$,
- pro dané r_i, s_i generujeme z $R(0.1r_i, 0.5r_i)$,
- p_i je generováno z $R(0,150)$,
- a_{ij} je generováno z $R(0,1.0)$ pro všechna $i \neq j$,

Pro náš test byly vygenerovány následující proměnné:

	Prodej. c.	Nákup. c.	Sběr. h.	Penalizace	Poměr z.
1. prodavač	1025.2944	582.2559	130.5624	127.9861	0.9094
2. prodavač	757.2803	425.3100	121.5453	145.2621	0.1768

Tabulka 3.1: Vygenerované hodnoty proměnných

Poměr záměny je v kolonce i-tého prodavače myšlen jako záměna i za j, $i,j \in \{1,2\}, i \neq j$.

Zlomky $\frac{r_i - c_i + p_i}{r_i - s_i + p_i}, i \in \{1,2\}$, které použijeme při následných výpočtech vycházejí pro prvního prodavače 0.5583 a pro druhého prodavače 0.6111. Musíme upozornit, že výsledné zlomky se liší od výpočtu z vypsaných hodnot, neboť v programu jsou proměnné zapsány s daleko větším počtem desetinných míst.

Nyní si pro každé $i \in \{1,2\}$ vygenerujeme pět různých hodnot X_i z $R(x_i,y_i)$, kde x_i je z $R(50,100)$ a $y_i = x_i + 50 * u$, kde u generujeme z $R(1.0,2.0)$. Dostáváme následující hodnoty:

Poptávka(X)	1	2	3	4	5
1. prodavač	137.6784	129.2741	68.2532	105.9370	72.3350
2. prodavač	96.3999	140.0517	113.9392	124.5529	105.1533

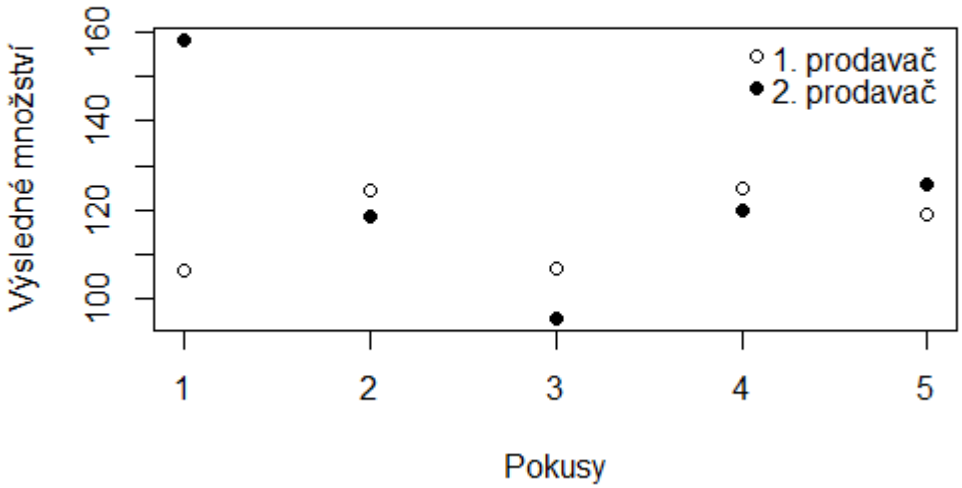
Tabulka 3.2: Vygenerované hodnoty náhodné poptávky

Hodnoty v jednotlivých sloupcích jsou poptávky pro jeden den. Nastavíme úroveň přesnosti na $\alpha = 0.00001$ a spustíme iteraci. Výsledný aproximované řešení pro jednotlivé poptávky jsou uvedeny v následující tabulce:

	1	2	3	4	5
1. prodavač	105.9973	124.1373	106.8117	124.6428	118.8095
2. prodavač	158.4883	118.4521	95.2627	119.7683	125.5422

Tabulka 3.3: Výsledné aproximované množství

Výsledné hodnoty jsou přibližným množstvím, které by měl nakoupit prodavač na začátku periody. Pro přehlednost vykreslíme výsledek do grafu níže.



Výdělky(π)	1	2	3	4	5
1. prodavač	42906.15	53851.29	15777.17	39241.88	11055.00
2. prodavač	31457.78	35506.39	28911.40	39064.50	28714.41

Tabulka 3.4: Zisky prodavačů

Výsledné výdělky jednotlivých prodavačů jsou uvedeny v tabulce (viz. 3.4)

Pomocí algoritmu jsme tedy nalezli aproximované řešení našeho problému. Každý prodavač by měl nakoupit množství produktu uvedené v tabulce (3.3) a jeho zisk z prodeje je uveden v tabulce (3.4).

4. Závěr

V tomto textu jsme se zabývali problémem, který se nazývá Trh prodavačů novin. Problém jsme převedli do spojitého systému a diskutovali problematiku řešení. Nejprve jsme si zavedli náš problém a na jednoduchém příkladu, kde jsme neuvažovali vedlejší faktory, jsme si dokázali některá základní lemmata a věty. Jako řešení jsme našli zlomek, který se použije při výpočtech optimálního množství nakoupeného produktu.

V další části jsme se zabývali složitějším problémem, kde jsme uvažovali i další výdaje a příjmy jednotlivých prodejců. Obecně jsme je pojmenovali sběr a penalizace. Sběr byl pokládán za příjem z neprodaného množství produktu a penalizace jako výdaje z neuspokojené poptávky. Zde jsme již ukázali, že v našem problému existuje tzv. Nashova rovnováha a ukázali jsme některé její vlastnosti.

V závěrečné části jsme aplikovali naše výsledky na numerickém příkladě. Aproximovali jsme si efektivní poptávku a použitím iteračního algoritmu jsme nalezli přibližné řešení našeho problému. Tento postup jsme následně použili na pět různých poptávek s distribuční funkcí z rovnoměrného rozdělení.

Seznam použité literatury

[1] Casimir, R. (1990). The newsboy and the flower-firl. *Omega Int. J. of Mgmt Sci.*, **18**(4), 395–398.

[2] Huang, D., Zhou, H. a Zhao, Q. (2011). A competitive multi-product newsbou problem with partial product substitution. *Omega Int. J. of Mgmt Sci.*, **39**(3), 302–312.

[3] Lippman, S. A. a McCardle, K. F. (1997). The competitive newsboy. *Operation Research*, **45**(1), 54–65.

[4] Netessine, S. a Rudi, N. (2003). Centralized and competitive inventory models with demand substitution. *Operations Research*, **51**(3), 329–335.

[5] Simchi-Levi, D., Chen, X. a Bramel, J. (2014). *The logic of logistics.* Springer-Verlag, New York. ISBN 978-1-4614-9148-4.

[6] Vives, X. (1990). Nash equilibrium with strategic complementaries. *Journal of Mathematical Economics*, **19**, 305–321.

Seznam tabulek

3.1 Vygenerované hodnoty proměnných 15
3.2 Vygenerované hodnoty náhodné poptávky 15
3.3 Výsledné aproximované množství 15
3.4 Zisky prodavačů 16