DOMÁCÍ CVIČENÍ

Tečna ke grafu funkce

V bodě $T = [a, f(a)]$: $\quad y - f(a) = f'(a).(x - a)$

1. Napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě T. Rovnici tečny uveďte v obecném tvaru:
   $a)\ \ f_1(x) = 2x^4 + 8x, \quad T = [-1, ?]$
   $b)\ \ f_2(x) = \dfrac{1}{x^2}, \quad T = \left[\dfrac{1}{2}, ?\right]$
   $c)\ \ f_3(x) = \dfrac{1 + x^3}{x - 1}, \quad T = [2, ?]$
   $d)\ \ f_4(x) = x^2.e^{-x}, \quad T = [1, ?]$
   $e)\ \ f_5(x) = 5x^2.lnx, \quad T = [1, ?]$
   $f)\ \ f_6(x) = \dfrac{sin2x + 1}{cosx + sinx}, \quad T = \left[\dfrac{\pi}{2}, ?\right].$

2. Je dána funkce: $\quad f(x) = 2x^2 + x - 1.$
   Na grafu funkce $y = f(x)$ určete bod T tak, aby
   a) tečna v bodě T měla směrnici k = 5.
   b) tečna v bodě T byla rovnoběžná s osou x.
   c) tečna v bodě T byla rovnoběžná s přímkou p: $x - y + 10 = 0$.

Zjišťování monotonie funkce

Jestliže je funkce f spojitá v intervalu I a má v každém bodě derivaci, platí:
je-li $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I$, potom funkce f je rostoucí,
je-li $f'(x) < 0 \quad \forall x \in I$, potom funkce f je klesající.

3. Použitím derivace funkce určete intervaly, ve kterých je funkce rostoucí a ve kterých klesající.

$a)\ \ f_1(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$ $\qquad b)\ \ f_2(x) = 4x^2 - x^4$

$c)\ \ f_3(x) = x + \frac{1}{x}$ $\qquad d)\ \ f_4(x) = \frac{1-2x}{x+3}$

$e)\ \ f_5(x) = (x^2 - 1)^4$ $\qquad f)\ \ f_6(x) = (x-3).\sqrt{x}$

$g)\ \ f_7(x) = \ln(1 - x^2)$ $\qquad h)\ \ f_8(x) = arccotg\,\frac{1}{1+x^2}$

<u>Druhá derivace funkce a zjišťování, zda funkce je konvexní, konkávní</u>

Jestliže je funkce f' spojitá v intervalu I a má v každém bodě derivaci, platí:
je-li $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$, potom je funkce konvexní,
je-li $f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$, potom je funkce konkávní.
Poznámka: Jestliže existuje okolí bodu $a \in D_f$ takové, že v bodě a dochází ke změně znamének f'', potom má funkce f v bodě a inflexi.

4. Vypočítejte druhé derivace následujících funkcí v libovolném bodě definičního oboru:

$a)\ \ f(x) = 3x^3 - 3x + 2$ $\qquad b)\ \ f(x) = x - lnx$

$c)\ \ f(x) = x^2.e^x$

5. Určete intervaly konvexnosti, konkávnosti a inflexní body následujících funkcí:

$a)\ \ h_1(x) = \frac{5}{x}$ $\qquad b)\ \ h_2(x) = x.lnx$

$c)\ \ h_3(x) = \frac{x}{x+1}$ $\qquad d)\ \ h_4(x) = x.e^x$

$e)\ \ h_5(x) = arctg\,\frac{1}{x}$ $\qquad f)\ \ h_6(x) = 4x^3 - x^4$

$g)\ \ h_7(x) = x^3 - x^2 + 1$ $\qquad h)\ \ h_8(x) = \frac{x}{1+x^2}$

$i)\ \ h_9(x) = \frac{e^x}{1+x}$

Výsledky

1. $a)\ \ y + 6 = 0, \qquad T = [-1, -6]$

   $b)\ \ 16x + y - 12 = 0, \quad T = \left[\frac{1}{2}, 4\right]$

   $c)\ \ 3x - y + 3 = 0, \quad T = [2,9]$

   $d)\ \ e^{-1}x - y = 0, \quad T = [1, e^{-1}]$

   $e)\ \ 5x - y - 5 = 0, \quad T = [1,0]$

   $f)\ \ x + y - 1 - \frac{\pi}{2} = 0, \quad T = \left[\frac{\pi}{2}, 1\right]$

2. $a)\ \ T = [1,2], \qquad b)\ \ T = \left[-\frac{1}{4}, -\frac{9}{8}\right] \qquad c)\ \ T = [0, -1]$

3. $a)\ \ roste\colon\ (-\infty,-1\rangle, \left\langle\frac{4}{3}, \infty\right), \quad klesá\colon\ \langle -1, \frac{4}{3}\rangle$

   $b)\ \ roste\colon\ (-\infty,-\sqrt{2}\rangle, \langle 0,2\rangle, \quad klesá\colon\ \langle -\sqrt{2}, 0\rangle, \langle\sqrt{2},\infty)$

   $c)\ \ roste\colon\ (-\infty,-1\rangle, \langle 1,\infty), \quad klesá\colon\ \langle -1,0), (0, 1\rangle$

   $d)\ \ klesá\colon\ (-\infty, -3), (-3, \infty)$

   $e)\ \ roste\colon\ \langle -1,0\rangle, \langle 1,\infty), \quad klesá\colon\ (-\infty,-1\rangle, \langle 0,1\rangle$

   $f)\ \ roste\colon\ \langle 1,\infty), \quad klesá\colon\ \langle 0,1\rangle$

   $g)\ \ roste\colon\ (-1,0\rangle, \quad klesá\colon\ \langle 0,1)$

   $h)\ \ roste\colon\ \langle 0,\infty), \quad klesá\colon\ (-\infty,0\rangle$

4. $a)\ \ f''(x) = 18x$ $\qquad b)\ \ f''(x) = \dfrac{1}{x^2}$

$c)\ \ f''(x) = e^x(x^2 + 4x + 2)$

5. $a)\ \ konvexní:\ \ (0, \infty),\qquad konkávní:\ \ (-\infty, 0)$

$b)\ \ konvexní:\ \ na\ celém\ D_f = (0, \infty)$

$c)\ \ konvexní:\ \ (-\infty, -1),\qquad konkávní:\ \ (-1, \infty)$

$d)\ \ konvexní:\ \ \langle -2, \infty),\qquad konkávní:\ \ (-\infty, -2\rangle$

$e)\ \ konvexní:\ \ (0, \infty),\qquad konkávní:\ \ (-\infty, 0)$

$f)\ \ konvexní:\ \ \langle 0,2\rangle,\qquad konkávní:\ \ (-\infty, 0\rangle, \langle 2, \infty)$

$g)\ \ konvexní:\ \ \left\langle \frac{1}{3}, \infty\right),\qquad konkávní:\ \ \left(-\infty, \frac{1}{3}\right\rangle$

$h)\ \ konvexní:\ \ \langle -\sqrt{3}, 0\rangle, \left\langle \sqrt{3}, \infty\right)\quad konkávní:\ \ \left(-\infty, -\sqrt{3}\right\rangle, \langle 0, \sqrt{3}\rangle$

$i)\ \ konvexní:\ \ (-1, \infty),\qquad konkávní:\ \ (-\infty, -1)$

$inflexní\ body:\qquad d)\ \ x = -2,\qquad f)\ \ x_1 = 0,\qquad x_2 = 2$

$g)\ \ x = \dfrac{1}{3},\qquad h)\ \ x_1 = -\sqrt{3},\quad x_2 = 0,\quad x_3 = \sqrt{3}$