Funkce dvou proměnných

Reálnou funkcí dvou reálných proměnných definovanou na množině $D_f \subseteq R^2$ rozumíme takový předpis $f(x, y)$, který každé uspořádané dvojici reálných čísel $[x, y] \in D_f$ přiřazuje právě jedno reálné číslo $z = f(x, y), z \in R$.
Stejně jako v případě funkcí jedné reálné proměnné se omezovat pouze na funkce spojité.
Graf funkce již nelze zakreslit v rovině R^2, jako tomu bylo u funkce jedné reálné proměnné, ale v prostoru R^3. Definičním oborem je buď celá rovina tvořená osami x, y nebo její podmnožina. Funkční hodnoty vytvářejí plochu nad tímto definičním oborem.

Příklad:

1. Grafem konstantní funkce $f(x, y) = c, \ c \in R$ s definičním oborem R^2 je **rovina** rovnoběžná s rovinou, které tvoří osy x, y. Tato rovina protíná osu z v bodě $[0,0, c]$.
2. Rovnice $x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \ r \geq 0$ určuje kulovou plochu. Střed plochy leží v počátku soustavy souřadnic, její poloměr je r. Aby se jednalo o funkci dvou proměnných x, y, musí být pro každou uspořádanou dvojici $[x, y] \in D_f$ přiřazeno právě jedno reálné číslo z. Mohou nastat dvě možnosti:
   $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ nebo
   $z = -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$
   Grafem je polovina kulové plochy a to buď plocha nad osami x, y nebo pod osami x, y.

Parciální derivace funkcí dvou proměnných

Podobně jako derivace byla jedním ze základních prostředků pro vyšetřování funkcí jedné reálné proměnné, budou parciální derivace jedním ze základních prostředků pro vyšetřování funkcí více proměnných.
Pomocí derivace funkce jedné reálné proměnné můžeme určit chování funkce – růst, pokles, extrémy. U plochy je to složitější, ale i zde můžeme určit lokální extrém a vypočítat rovnici tečné roviny v libovolném bodě grafu funkce, tj. určit tečnou rovinu v libovolném bodě plochy.

Parciální derivace počítáme tak, že ponecháme jednu hodnotu proměnné x nebo y pevnou (považujeme jí za konstantu) a derivujeme podle druhé proměnné. Pokud ponecháme konstantní proměnnou y, derivujeme jen podle proměnné x. Značíme $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$. Pokud ponecháme konstantní proměnnou x, derivujeme jen podle proměnné y. Značíme $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$.

Příklad:

Vypočtěte obě parciální derivace funkce v bodě [2,1]:

$f(x,y) = 3x^2y + 2xy^2 - 2xy - 5y + 1 \qquad D_f = R^2$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 6xy + 2y^2 - 2y \qquad \frac{\partial f(2,1)}{\partial x} = 12 + 2 - 2 = 12$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3x^2 + 4xy - 2x - 5 \qquad \frac{\partial f(2,1)}{\partial y} = 12 + 8 - 4 - 5 = 11$$

Parciální derivace druhého řádu

Parciální derivace funkce $f(x,y)$ podle x nebo podle y je opět funkcí x a y. Můžeme ji tedy opět derivovat podle proměnné x nebo podle proměnné y. Protože každou z funkcí $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ lze derivovat podle proměnné x i y, dostaneme tak čtyři parciální derivace funkce $f(x,y)$ druhého řádu. Jejich označení je následující:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ nazýváme smíšenými derivacemi druhého řádu funkce $f(x,y)$. Vzhledem k tomu, že budeme pracovat se spojitými funkcemi, nebude záležet na pořadí, ve kterém původní funkci $f(x,y)$ podle proměnných x a y derivujeme. Pro spojité funkce totiž platí:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Analogicky jako zavádíme derivace druhého řádu, zavádíme i vyšší parciální derivace.

Příklad:

Vypočtěte $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ pro funkci:

$$f(x,y) = \frac{x}{y} - e^{xy}$$

Protože $x \in R,\ y \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, je definiční obor $D_f = \boldsymbol{R}\ x\ \boldsymbol{R} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$. Pro naši představu je definičním oborem rovina, tvořená osami x, y ovšem bez osy x. Na tomto definičním oboru je funkce spojitá.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{y} - ye^{xy}, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} - xe^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -y^2 e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2\frac{x}{y^3} - x^2 e^{xy},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{1}{y^2} - e^{xy} - xye^{xy}$$

Pokud bychom počítali $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$, dostaneme stejný výsledek.

Tečná rovina a její analogie k tečně ke grafu funkce v $\boldsymbol{R}^2$

Tečna ke křivce v $\boldsymbol{R}^2$:

Tečnu k funkci $y = f(x)$ v $\boldsymbol{R}^2$v bodě $T = [a, f(a)]$ získáme pomocí $f'(x)$:

$$\boldsymbol{f'(a) = tg\varphi = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{y - f(a)}{x - a}}$$

Analytické vyjádření této tečny lze napsat ve tvaru:

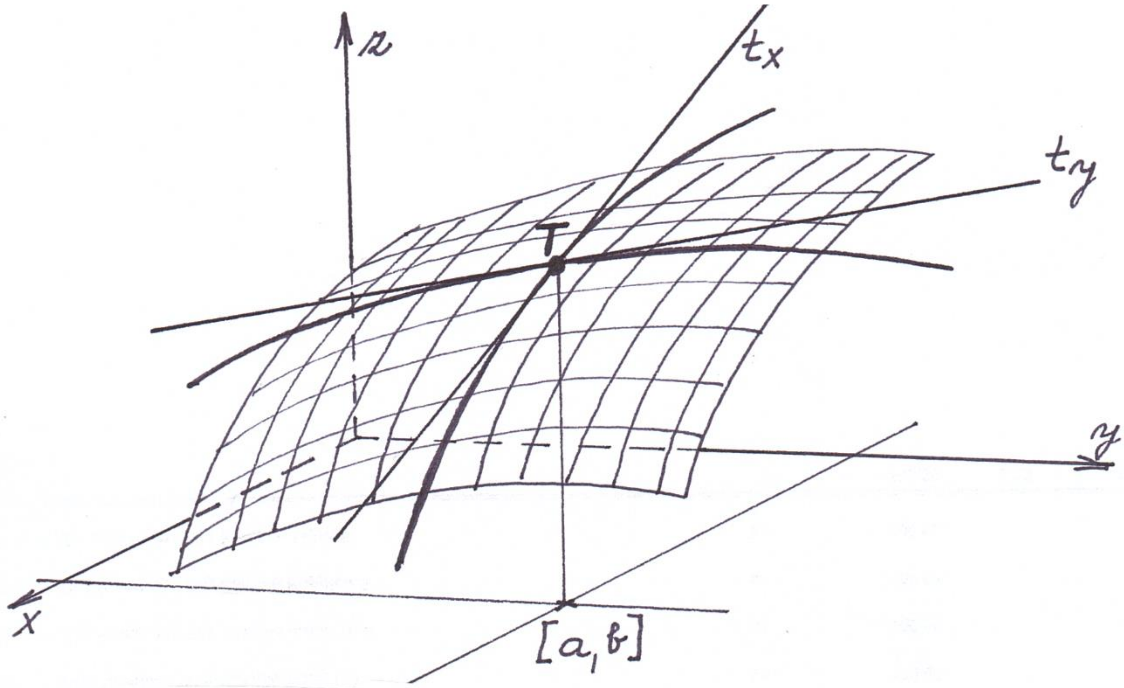
$$\boldsymbol{y - f(a) = f'(a).(x - a)}$$

Po úpravě lze získat obecnou rovnici přímky: $ax + by + c = 0$.

Pokud chceme zjistit rovnici **tečné roviny k funkci $\boldsymbol{f(x,y)}$ v $\boldsymbol{R^3}$** v bodě $T = [a, b, f(a, b)]$, spočítáme $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$.

Analytické vyjádření tečné roviny lze napsat ve tvaru:

$$\boldsymbol{z - f(a,b) = \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}(y-b)}$$



Příklad:

Napište obecnou rovnici tečné roviny k ploše $f(x,y)$ v bodě $T_0 = [1,2]$:

$f(x,y) = x^3y - xy^2 + 2xy - x^2 - 5x + 1$

Funkce je spojitá v $D_f = R^2$, funkční hodnota $f(1,2) = -3$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3x^2y - y^2 + 2y - 2x - 5$ $\qquad$ $\frac{\partial f(1,2)}{\partial x} = 6 - 4 + 4 - 2 - 5 = -1$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^3 - 2xy + 2x$ $\qquad$ $\frac{\partial f(1,2)}{\partial y} = 1 - 4 + 2 = -1$

Rovnice tečné roviny:

$$z - f(a,b) = \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}(y-b)$$

$$z + 3 = \frac{\partial f(1,2)}{\partial x}(x-1) + \frac{\partial f(1,2)}{\partial y}(y-2)$$

$$z + 3 = -1(x-1) - 1(y-2) \Longrightarrow$$

$\boldsymbol{t}$: $\quad \boldsymbol{x + y + z = 0}$

Gradient

Velmi důležitá je veličina gradient. Je to vektor, který udává směr nejrychlejšího růstu funkce $f(x,y)$. Chápeme ho jako zobrazení, které každému bodu

$X \in D_f \subset R^2$ přiřazuje vektor $\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}\,\boldsymbol{f(x,y)} \boldsymbol{\epsilon} \boldsymbol{R^2}$.

Pokud $X_0 \in D_f$a obě parciální derivace existují, platí:

$$\overrightarrow{grad}\, f(X_0) = \left(\frac{\partial f(X_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(X_0)}{\partial y}\right).$$

Někdy se místo označení $\overrightarrow{grad}\, f, \overrightarrow{grad}\, f(X)$ používá $\triangle f, \triangle f(X)$.Je to operátor nabla a jeho výsledkem je vektorové pole vyjadřující směr a velikost největší změny.

Z praxe např. známe gradient teploty. Je kolmý k izotermickým plochám a určuje změnu teploty na jednotku vzdálenosti ve směru, ve kterém dochází k největšímu prostorovému poklesu teploty.

Gradient souvisí též s **tečnou rovinou**. Její normálový vektor je roven: $\vec{n} = \left(\frac{\partial f(A)}{\partial x}, \frac{\partial f(A)}{\partial y}, -1\right) = (a,b,c)$ pro tečnou rovinu tvaru: $ax + by + cz + d = 0$ v bodě A.

Lokální extrémy

Stejně jako v případě funkce jedné proměnné byla pro určení lokálních extrémů důležitá první i druhá derivace, analogický postup lze zvolit i v případě funkce dvou proměnných.

Postup u funkce jedné proměnné

1. Vypočítáme první derivaci funkce a zjistíme stacionární body (tj. body, ve kterých je první derivace rovna nule).
2. Vypočítáme druhou derivaci funkce a dosadíme do ní stacionární body x_0. Je-li $f''(x_0) < 0$, je v bodě x_0 lokální maximum, je-li $f''(x_0) > 0$, je v bodě x_0 lokální minimum.

Postup u funkce dvou proměnných je částečně analogický:

1. Určíme parciální derivace $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ a vyřešíme, pro které body $A = [x_0, y_0]$ jsou obě parciální derivace nulové.
2. Vypočítáme parciální derivace druhého řádu a nabízelo by se, že podle znaménka obou derivací určíme extrém.

   U funkcí více proměnných však může dojít k situaci, že derivace budou mít různé znaménko.

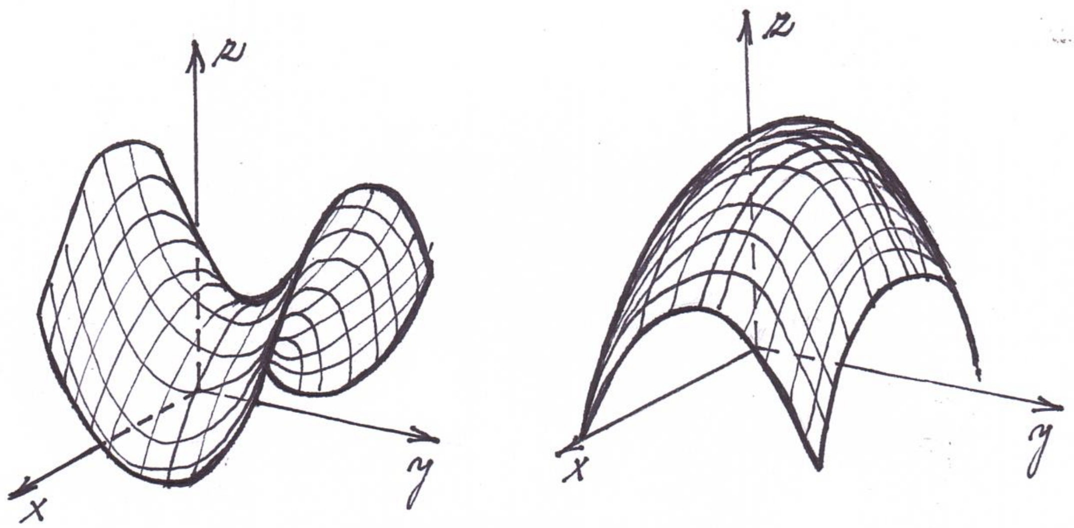
   Např. funkce:

$f(x,y) = -x^2 + y^2$ v bodě [0,0] má

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -2x, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = -2 < 0$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 2 > 0$$

Tento bod ([0,0]) nazýváme termínem **sedlový bod** a funkce v tomto bodě nemá lokální extrém.



Abychom vyloučili sedlový bod, sestavíme matici z parciálních derivací druhého řádu včetně smíšených a vypočítáme determinant této matice:

$$det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Platí následující tvrzení:

Nechť funkce $f(x, y)$ je spojitá v intervalu I, má zde spojité parciální derivace prvého i druhého řádu a dále platí, že v bodě $[x_0, y_0]$ je $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = 0$. Jestliže $det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2} \end{pmatrix} > 0$, má funkce ve stacionárním bodě $[x_0, y_0]$ lokální extrém. V případě, že $det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2} \end{pmatrix} < 0$, jedná se o sedlový bod.

Jsou-li obě derivace $\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}$ a $\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}$ kladné, jedná se o lokální minimum, jsou-li záporné, jedná se o lokální maximum.

Příklad:

Určete lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 - 3xy$

1. Určíme definiční obor: $D_f = R^2$
2. Vypočítáme parciální derivace prvního řádu a určíme stacionární body:
   $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x - 3y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{3}{2}y$$
   $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y - 3x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2y - 3.\left(\frac{3}{2}y\right) = 0 \qquad \Rightarrow \quad y = 0, x = 0$$
   Stacionární bod je jediný: $A = [x_0, y_0] = [0,0]$.
3. Vypočítáme parciální derivace druhého řádu, sestavíme z nich matici a vypočítáme determinant:
   $$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = -3$$
   $$det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2} \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 9 = -5 < 0$$

Výsledek: Bod $A = [0,0]$ je sedlový bod.

Pzn. Pokud je ve stacionárním bodě $[x_0, y_0]$ funkce $f(x,y)$ determinant roven nule, nedá se o charakteru funkce nic tvrdit. Je zapotřebí dalšího vyšetřování. Např. zkoumáme hodnoty funkce v jiných směrech. Těmito situacemi se ovšem nebudeme zabývat.