Určitý integrál

Zatímco neurčitým integrálem dané funkce je opět funkce,

určitým integrálem je číslo, v našem případě reálné číslo, přičemž funkce $f(x)$ musí být definovaná na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, $a \in R$, $b \in R$.

Způsobů definic určitého integrálu je několik, uvedeme zde dva.

Riemannova definice určitého integrálu

Nechť funkce $f(x)$ je definovaná na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a je na tomto intervalu omezená. Tento interval rozdělíme na **n** dílčích uzavřených intervalů $\langle x_0, x_1\rangle, \langle x_1, x_2\rangle, \langle x_2, x_3\rangle, \dots \langle x_{n-1}, x_n\rangle$.

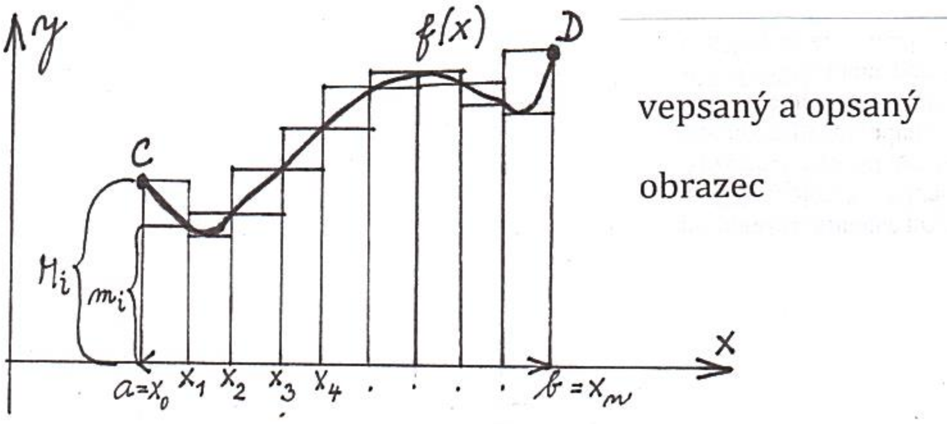
K tomuto dělení D sestrojíme tzv. dolní součet
$s(D) = m_1.(x_1 - x_0) + m_2.(x_2 - x_1) + \cdots m_n.(x_n - x_{n-1})$, kde m_i je absolutní minimum v $i - tém$ dílčím intervalu a tzv. horní součet
$S(D) = M_1.(x_1 - x_0) + M_2.(x_2 - x_1) + \cdots M_n.(x_n - x_{n-1})$, kde M_i je absolutní maximum v $i - tém$ dílčím intervalu.
$m_i \leq M_i$, $s(D) \leq S(D)$.

Platí: Pro jakékoli dělení D na intervalu $\langle a, b\rangle$ vždy existuje právě jedno číslo J (které tedy na dělení D nezávisí), pro které je: $s(D) \leq J \leq S(D)$.

Toto číslo J se nazývá určitý integrál funkce $f(x)$ od ***a*** do ***b*** a značí se: $\int_a^b f(x)dx$.

Číslo ***a*** se nazývá dolní mez, číslo ***b*** se nazývá horní mez tohoto integrálu.

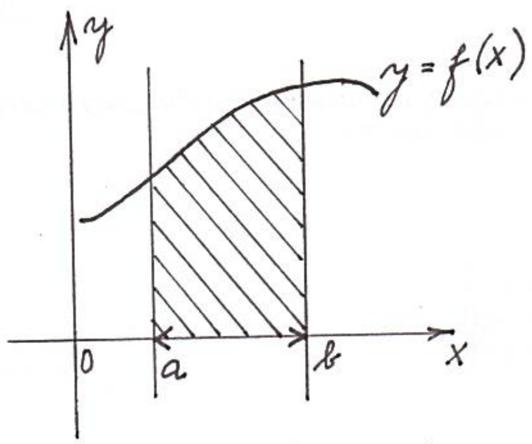
$$s(D) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{dx} \leq S(D).$$



Čím je dělení intervalu jemnější, hodnota integrálu se blíží dolní a horní mezi.

Pokud nahradíme interval $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$ pro každé $i \in \{0,1,2,\dots,n\}$ elementárním délkovým koeficientem dx ($dx \to 0$), potom $\lim\limits_{dx\to 0} s(D) = \int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{dx\to 0} S(D)$.

Geometrický význam Riemannova určitého integrálu je velmi názorný. Pro nezápornou funkci $f(x)$ je $\int_a^b f(x)dx$ číslo, které udává obsah obrazce vymezeného přímkami $x = a$, $x = b$ a křivkou $y = f(x)$.



Newton - Leibnizova definice určitého integrálu

Nechť $f(x)$ je funkce spojitá v $\langle a,b\rangle$, která má v (a,b) primitivní funkci spojitou v $\langle a,b\rangle$. Potom $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$.

Výhodou Newtonova integrálu je jeho snadnější výpočet,

výhodou Riemannova integrálu je jeho geometrická interpretace.

Příklady:

1. $\int_1^2 (x^2 - 3x + 2)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - \frac{12}{4} + 4\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2\right) = -\frac{1}{6}$
2. $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^1 = -1 - 1 \neq -2$ VÝSLEDEK JE ŠPATNÝ

   $Integrál\ neexistuje, protože\ funkce\ \ f(x)\ není\ spojitá\ v\ \langle -1,1\rangle.$

Výpočet určitého integrálu

Kromě použití základních vzorců pro výpočet integrálu můžeme použít metodu per partes, substituční metodu a lze použít i rozklad na parciální zlomky.

Také platí následující pravidla:

1. Je-li funkce f spojitá a nezáporná v intervalu $\langle a, b\rangle$, je $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

2. Jsou-li funkce f, g spojité v intervalu $\langle a, b\rangle$ a je-li $f(x) \geq g(x)$, potom $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

3. Při záměně mezí určitého integrálu se mění znaménko určitého integrálu: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

4. Je-li funkce f spojitá na intervalu I a interval obsahuje takové body a, b, c, pro něž je $a < c < b$, potom platí: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Aplikace

Určitý integrál lze použít pro výpočet obsahu rovinného útvaru, pro výpočet objemu rotačního tělesa, pro výpočet obsahu pláště rotačního tělesa, pro výpočet délky křivky, pro výpočet těžiště rovinného obrazce a ve fyzice např. pro zjištění dráhy přímočarého pohybu, pro zjištění vykonané mechanické práce, pro výpočet hmotnosti nehomogenního tělesa, pro výpočet momentu setrvačnosti tělesa apod.

Uvedeme jen dvě aplikace, a to výpočet obsahu rovinného tělesa a výpočet objemu rotačního tělesa.

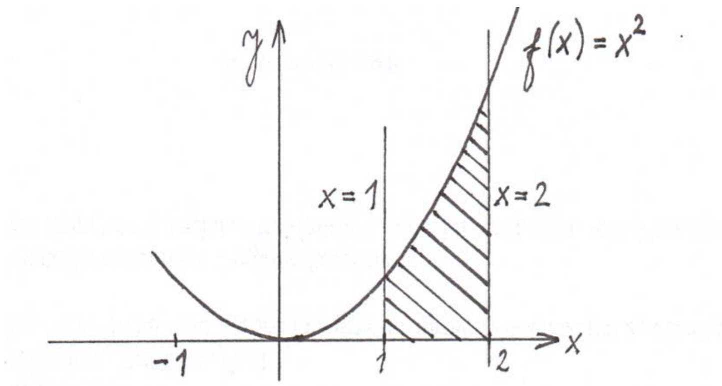
1. Výpočet obsahu rovinného tělesa

Je-li $f(x)$ je funkce spojitá a **nezáporná v** $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$, potom obsah plochy vymezené přímkami $x = a$, $x = b$ a grafem funkce $y = f(x)$ je dán vzorcem S=$\int_a^b f(x)dx$.

Příklad 1:

Vypočtěte obsah útvaru omezeného grafem funkce $f(x) = x^2$, osou x a přímkami $x = 1, x = 2$.

Nejdříve načrtneme graf. Rovnice $f(x) = x^2$ určuje parabolu s vrcholem $V = [0,0]$. Parabola se otvírá do kladné části osy y.



Poté vypočítáme obsah zkoumaného útvaru:

$$S = \int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{3}[x^3]_1^2 = \frac{1}{3}(8-1) = \frac{7}{3} j^2.$$

j^2 .... jednotek čtverečních

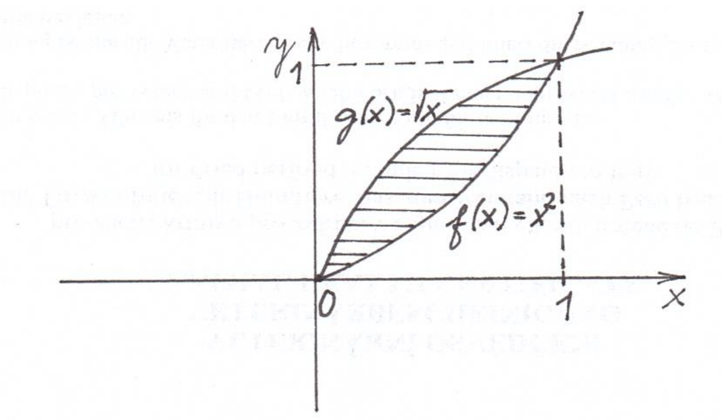
Příklad 2:

Vypočtěte obsah útvaru omezeného křivkami $f(x) = x^2, g(x) = \sqrt{x}$.

K zakreslení grafu je potřeba určit průsečíky křivek:

$x^2 = \sqrt{x}$. Umocněním obou stran rovnice získáme:
$x^4 = x \Rightarrow x^4 - x = 0 \Rightarrow x^3(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1$

Dále sestrojíme graf a vypočítáme obsah:



$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left[\frac{2}{3}(x)^{3/2}\right]_0^1 - \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}j^2$$

2. Výpočet objemu rotačního tělesa

Uvažujme rotační těleso, které vznikne rotací útvaru kolem osy x. Útvar je ohraničen křivkou o rovnici $y = f(x)$, která je grafem spojité funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$.

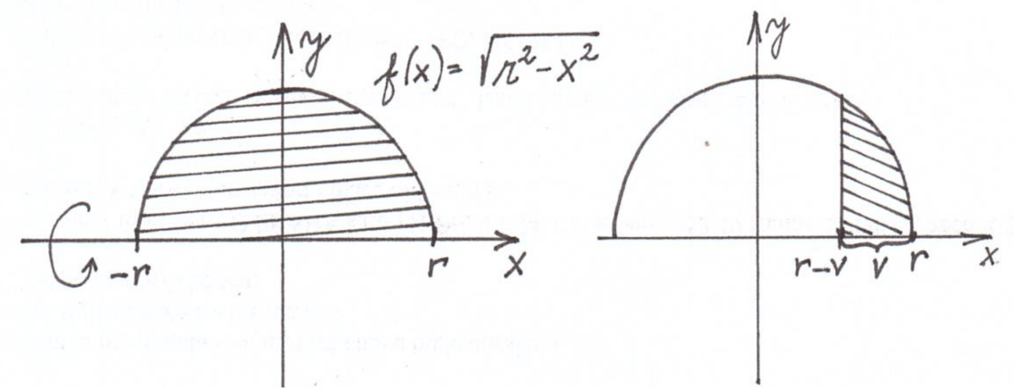
Objem vypočítáme podle vztahu: $\boldsymbol{V = \pi \int_a^b f^2\,(x)dx}$

Příklad:

Vypočítejte objem koule o poloměru $\boldsymbol{r}$.

Útvar, jehož rotací dostaneme kouli, umístíme vhodně do kartézské soustavy souřadnic. Rotuje-li vyšrafovaná půlkružnice kolem osy $\boldsymbol{x}$, můžeme použít vztah

$V = \pi \int_a^b f^2\,(x)dx.$



Rovnice kružnice je: $x^2 + y^2 = r^2$. Protože $y^2 = r^2 - x^2 = f^2(x)$, lze vypočítat objem dosazením do vzorce pro objem: $V = \pi \int_a^b f^2\,(x)dx = \pi \int_{-r}^{r}(r^2 - x^2)dx = \pi.\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} = \pi\left[\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) - (-r^3 + \frac{r^3}{3})\right] = \frac{4}{3}\pi r^3$

Pzn. Pokud zvolíme pro stejnou funkci jiné meze, např. $\langle 0, r\rangle$, můžeme vypočítat objem polokoule, pro případ $\langle r - v, r\rangle$ vypočítáme objem kulové výseče.

Nevlastní integrál

Dosud jsme počítali určitý integrál funkce $f(x)$ v $\langle a, b\rangle$. V řadě případů je možné také spočítat určitý integrál v (a, b).

Platí: Jestliže funkce $f(x)$ je definovaná a spojitá v (a, b) a $F(x)$ je primitivní funkcí k funkci $f(x)$ na (a, b), potom

$$\int_a^b x dx = \lim_{x \to b^-} F(x) - \lim_{x \to a^+} F(x)$$

Pokud jsou obě limity vlastní, říkáme, že integrál konverguje.

Pokud je aspoň jedna z limit nevlastní nebo neexistuje, říkáme, že integrál diverguje.

Příklady:

1. $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_0^1 = -1 - \lim_{x \to 0^+} (-\frac{1}{x}) = +\infty$ Integrál diverguje.

2. $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = \lim_{x \to \infty} (-\frac{1}{x}) - (-1) = 1$ Integrál konverguje.

3. $\int_{-1}^1 \frac{e^x}{e^x - 1} dx = \int_{-1}^0 \frac{e^x}{e^x - 1} dx + \int_0^1 \frac{e^x}{e^x - 1} dx \qquad x \neq 0$
   substituce:
   $t = e^x - 1$
   $dt = e^x dx \Rightarrow \int \frac{1}{t} dt = ln\,|e^x - 1|$

   $$\int_{-1}^1 \frac{e^x}{e^x - 1} dx = [ln|e^x - 1|]_{-1}^0 + [ln|e^x - 1|]_0^1 = \lim_{x \to 0^-} ln|e^x - 1| - ln|e^{-1} - 1| + ln|e^1 - 1| - \lim_{x \to 0^+} ln|e^x - 1|$$

   Protože obě limity ve vztahu jsou nevlastní, integrál diverguje.