Integrály

Primitivní funkce

Nechť jsou funkce $F(x), f(x)$ definovány na otevřeném intervalu I.

Jestliže pro všechna $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$, potom funkci $F(x)$ nazýváme **primitivní funkcí** k funkci $f(x)$ na intervalu I.

Je-li funkce $F(x)$ v intervalu I primitivní funkcí k funkci $f(x)$, pak každá primitivní funkce k funkci $f(x)$ je ve tvaru $F(x) + c$. $c \in R$ nazýváme integrační konstanta.

Ke každé spojité funkci na intervalu I existuje v tomto intervalu primitivní funkce.

Značení:

Pro označení primitivní funkce používáme zápis:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Hledání primitivní funkce k funkci $f(x)$ nazýváme integrováním funkce $f(x)$.

Příklady:

1. k funkci $f(x) = cosx + 3$, kde $x \in R$,nalezneme primitivní funkci:
   $F(x) = sinx + 3x + c$, protože $F'(x) = cosx + 3$.
   $Píšeme$: $\int(cosx + 3)dx = sinx + 3x + c$, kde $x \in R, c \in R$
2. k funkci $f(x) = e^x + x^2$, kde $x \in R$, nalezneme primitivní funkci:
   $$F(x) = e^x + \frac{x^3}{3} + c$$
   $Píšeme$: $\int(e^x + x^2)dx = e^x + \frac{x^3}{3} + c$, kde $x \in R, c \in R$.

Základní vzorce pro určení primitivních funkcí:

$\int 0dx = c, \int dx = x + c$	$x \in R, c \in R$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	např. $x \in R^+, c \in R, n \in R \setminus \{-1\}$
$\int \frac{1}{x} dx = ln\|x\| + c$	$x \in R \setminus \{0\}, c \in R$
$\int e^x dx = e^x + c$	$x \in R, c \in R$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{ln\, a} + c$	$x \in R, c \in R$
$\int cosx\, dx = \sin x + c$	$x \in R, c \in R$
$\int \sin x\ dx = -\cos x + c$	$x \in R,\ c \in R$
$\int \frac{1}{cos^2 x} dx = \mathrm{tg}\, x + c$	$x \in R \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z\right\}, c \in R$
$\int \frac{1}{sin^2 x} dx = -\mathrm{cotg}\, x + c$	$x \in R \setminus \{k\pi, k \in Z\}, c \in R$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsinx + c$	$x \in (-1, 1), c \in R$
$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arccosx + c$	$x \in (-1, 1), c \in R$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \mathrm{arctg}\, x + c$	$x \in R, c \in R$
$\int \frac{-1}{1+x^2} dx = \mathrm{arcotg}\, x + c$	$x \in R, c \in R$

Vlastnosti integrálů

$\int \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}$ nazýváme **neurčitým integrálem**.

Pravidla pro výpočet integrálů:

Platí:

1. $\int k.f(x)dx = k.\int f(x)dx,\ \ k \in R$
2. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Mezi derivací a neurčitým integrálem platí ještě dva následující vztahy:

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$
2. $\int f'(x)dx = f(x) + c,\ \ c \in R$

Integrační metody

Metoda per partes

Jestliže funkce $u(x), v(x)$ mají na intervalu I spojité derivace. Potom platí:

$$\int u'(x).v(x)dx = u(x).v(x) - \int u(x).v'(x)dx$$

Vzorec je odvozen z pravidla o derivování součinu:

$[u(x).v(x)]' = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$

$u'(x).v(x) = [u(x).v(x)]' - u(x).v'(x).$

Integrováním obou stran rovnosti získáme výše uvedený vzorec.

Metoda per partes znamená integrovat po částech. Zkráceně zapisujeme integrál ve tvaru:

$$\int u'v = u.v - \int u.v'.$$

Smysl použití metody je v tom, abychom funkci u uměli vypočítat a aby $\int u.v'$. byl jednodušší než $\int u'v$.

Příklady:

1. $\int x.e^x dx = \begin{vmatrix} u' = e^x & v = x \\ u = e^x & v' = 1 \end{vmatrix} = x.e^x - \int e^x dx = x.e^x - e^x + c$

   $x \in R, c \in R$

2. $\int lnxdx = \int 1lnxdx = \begin{vmatrix} u' = 1 & v = lnx \\ u = x & v' = \frac{1}{x} \end{vmatrix} = x.lnx - \int x.\frac{1}{x}dx =$

   $x.lnx - x + c, \quad x \in (0, \infty), c \in R$

Metodu per partes aplikujeme nejenom v případě $\int lnxdx$, ale i v případech:

$\int arctgxdx$, $\int arccotgxdx$, $\int arcsinxdx$, $\int arccosxdx$.

V některých případech je nutné metodu per partes několikrát opakovat, např. při výpočtu: $\int x^2.e^x dx$.

Substituční metoda

Jestliže funkce $f(t)$je spojitá na intervalu (α, β) a funkce $t = g(x)$ má spojitou první derivaci v intervalu (a, b) a tento interval zobrazuje do intervalu (α, β),potom $\int f\big(g(x)\big).g'(x)dx = \int f(t)\,dt = F(t) + c$, kde za t na pravé straně dosazujeme $t = g(x)$.

Vzorec je odvozen z pravidla o derivování složené funkce:

$(F(g(x))' = F'(g(x)).g'(x) = f(g(x)).g'(x)$

Integrováním obou stran získáme výše uvedený vzorec.

Derivace funkce $t = g(x)$ se značí též $\frac{dt}{dx}$ a rovnost $\frac{dt}{dx} = g'(x)$ můžeme formálně psát $dt = g'(x)dx$.

Příklady:

1. $\int (2x-5)^7 dx$

(Vnitřní funkce je $t = 2x - 5$, vnější funkce $f(t) = t^7$)

Je-li $t = 2x - 5$, potom $dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$.

Potom:

$$\int (2x-5)^7 dx = \int t^7 \frac{dt}{2} = \frac{t^8}{16} + c = \frac{(2x-5)^8}{16} + c, \qquad x \in R, c \in R$$

2. $\int sin2xdx$

(Vnitřní funkce je $t = 2x$, vnější funkce $f(t) = sint$)

Je-li $t = 2x$, potom $dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$.

Potom:

$$\int sin2xdx = \int sint.\frac{dt}{2} = -\frac{1}{2}cost + c = -\frac{1}{2}cos2x + c, \quad x \in R, c \in R$$

3. $\int 8x^2(x^3+5)^6 dx$

(Vnitřní funkce je $t = x^3 + 5$, vnější funkce $f(t) = t^6$)

Je-li $t = x^3 + 5$, potom $dt = 3.x^2dx \Rightarrow x^2dx = \frac{dt}{3}$.

Potom:

$$\int 8x^2.(x^3+5)^6 dx = \int 8.(x^3+5)^6.x^2dx = \int 8t^6.\frac{dt}{3} = \frac{8}{3}.\frac{t^7}{7} + c =$$

$$= \frac{8}{21}.(x^3+5)^7 + c, \qquad x \in R, c \in R$$

Rozklad na parciální zlomky a následná integrace

Tento rozklad provádíme, když chceme počítat neurčité integrály tvaru:
$\int \frac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x), Q(x)$ jsou polynomy.
Je-li stupeň polynomu $P(x)$ menší než stupeň polynomu $Q(x)$, nazýváme racionální lomenou funkci $\frac{P(x)}{Q(x)}$ **ryze lomenou racionální funkcí**, je-li stupeň polynomu $P(x)$ větší nebo roven stupni polynomu $Q(x)$, mluvíme o **neryze lomené racionální funkci**. Neryze lomenou racionální funkce lze dělením převést na součet polynomu a ryze lomené racionální funkce. Tuto ryze lomenou racionální funkci rozložíme na součet jednodušších zlomků, které nazýváme parciální zlomky.

Postup pro převod na parciální zlomky:

Jmenovatel rozložíme na součin kořenových činitelů.

1. Je-li v rozkladu jmenovatele na kořenové činitele výraz $(ax + b)$, odpovídá tomuto činiteli v rozkladu parciální zlomek $\frac{A}{ax+b}$, kde A je konstanta.
2. Je-li v rozkladu jmenovatele na kořenové činitele výraz $(ax + b)^k, k > 1$, odpovídá tomuto činiteli v rozkladu k parciálních zlomků tvaru: $\frac{A_1}{ax+b}, \frac{A_2}{(ax+b)^2}, \dots \frac{A_k}{(ax+b)^k}$, kde $A_1, A_2, \dots A_k$ jsou konstanty.
3. Je-li v rozkladu jmenovatele na kořenové činitele výraz $ax^2 + bx + c$, který nemá reálné kořeny, pak tomuto činiteli odpovídá v rozkladu parciální zlomek tvaru $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$, kde A, B jsou konstanty.

Ostatní typy příkladů nebudeme probírat.

Příklad 1:

$$\frac{\mathbf{1}}{x^2-1} = \frac{1}{(x+1).(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+1)}{(x+1).(x-1)} =$$

$$= \frac{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})}{x^2-1} \Rightarrow$$

$1 = (A + B)x + (-A + B)$

$0x + 1 = (A + B)x + (-A + B)$

$(A + B = 0) \wedge (-A + B = 1)$ a vyřešením této soustavy rovnic dostaneme $A = \frac{-1}{2}, B = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{x^2 - 1} = -\frac{\frac{1}{2}}{x + 1} + \frac{\frac{1}{2}}{x - 1}$$

Příklad 2:

$$\frac{\mathbf{1}}{x^3 - x^2} = \frac{1}{x^2.(x - 1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x - 1}$$
$$= \frac{A.(x - 1) + B.x.(x - 1) + C.x^2}{x^2.(x - 1)}$$
$$= \frac{\boldsymbol{x^2.(B + C) + x.(A - B) - A}}{x^2.(x - 1)}$$
$$\Rightarrow x^2.(B + C) + x.(A - B) - A = x^2.0 + x.0 + 1 \Rightarrow$$

$B + C = 0$
$A - B = 0$
$-A = 1$

vyřešením této soustavy rovnic dostaneme:

$A = -1, B = -1, C = 1$

$$\frac{1}{x^3 - x^2} = \frac{-1}{x^2} + \frac{-1}{x} + \frac{1}{x - 1}$$

Příklad 3:

$$\frac{x - 3}{x^2 + 2x + 2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2}$$

protože diskriminant je záporný $(D = -4)$, je:

$$A = 1, B = -3$$

Integrování

Integrujeme jednotlivé členy rozkladu s tím, že využíváme následujících poznatků:

1. $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + c, \qquad x \in R\backslash\{0\}, c \in R$
2. $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + c, \qquad x \in R\backslash\{0\}, c \in R$ obecně mocninná funkce

platí i pro jinou mocninu x

3. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctgx + c, \qquad x \in R, c \in R$

Vrátíme se opět k řešeným příkladům:

Příklad 1:

$$\int \frac{1}{x^2-1} dx = \int \left(-\frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} \right) dx = -\frac{1}{2} ln|x+1| + \frac{1}{2} ln|x-1| + c$$

$$= \frac{1}{2} ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c, \qquad x \neq \pm 1, c \in R$$

Příklad 2:

$$\int \frac{1}{x^3-x^2} dx = \int (\frac{-1}{x^2} + \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1}) dx = \frac{1}{x} - ln|x| + ln|x-1| + c$$

$$= \frac{1}{x} + ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + c, \qquad x \neq 1, x \neq 0, c \in R$$

Příklad 3:

Poslední příklad řešíme tak, že čitatel rozepíšeme pomocí derivace jmenovatele tak, aby ve druhém členu nebylo obsaženo x:

protože $(x^2 + 2x + 2)' = 2x + 2$, rozepíšeme čitatel následovně:

$$x - 3 = \frac{1}{2}(2x+2) - 4$$

$$\int \frac{x-3}{x^2+2x+2} dx = \int (\frac{\frac{1}{2}(2x+2)}{x^2+2x+2} + \frac{-4}{x^2+2x+2}) dx$$

$$= \frac{1}{2} ln|x^2+2x+2| - 4 \int \frac{1}{(x+1)^2+1} dx$$

$$= \frac{1}{2} ln|x^2+2x+2| - 4arctg(x+1) + c, \qquad x \in R, c \in R$$

u integrálu

$\int (\frac{\frac{1}{2}(2x+2)}{x^2+2x+2})\, dx$ lze použít substituce $t = x^2 + 2x + 2$,

u integrálu

$\int \frac{-4}{(x+1)^2+1} dx$ lze použít substituce $t = x + 1$.