Řešení rovnice Ekmanovy spirály

Řešíme soustavu rovnic pro složky rychlosti u a v pro stacionární a horizontálně homogenní pole proudění s konstantním koeficientem difúze

$$
\begin{aligned}
fv + K\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= 0,\\
-f(u-G) + K\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= 0,
\end{aligned}
$$

kde f je Coriolisův parametr, K je koeficient turbulentní difúze a $G = u_g$ je geostrofická ruchlost, s okrajovými podmínkami

$$
\begin{aligned}
&u = v = 0 \qquad \text{pro } z = 0,\\
&u \to u_g = G,\\
&v \to v_g = 0 \qquad \text{pro } z \to \infty.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Rovnice přepíšeme do tvaru

$$
\begin{aligned}
f(v - v_g) + Ku'' &= 0,\\
-f(u - u_g) + Kv'' &= 0,
\end{aligned}
$$

kde $v_g = 0$ a první rovnici vynásobíme $-i$ a rovnice sečteme

$$
-f(u - u_g + iv - iv_g) + Kv'' - iKu'' = 0.
$$

Zavedeme komplexní substituci

$$
\begin{aligned}
\xi &= u + iv,\\
\xi_g &= u_g + iv_g = 0,
\end{aligned}
$$

a získáváme

$$
iK\xi'' + f(\xi - \xi_g) = 0,
$$

neboli

$$
\xi'' - \frac{if}{K}\xi = -\frac{if}{K}\xi_g,
$$

což je nehomogenní lineární diferenciální rovnice, jejíž obecné řešení je obecné řešení homogenní diferenciální rovnice plus jedno partikulární řešení nehomogenní diferenciální rovnice.

Jedním partikulárním řešením je zřejmě

$$\xi = \xi_g,$$

tedy celá atmosféra v geostrofické rovnováze. Homogenní diferenciální rovnice pak odpovídá rovnici harmonického oscilátoru

$$\xi'' + \omega^2 \xi = 0,$$

s frekvencí

$$\omega_\pm = \pm(1+i)\sqrt{\frac{f}{2K}} =: \pm(1+i)\gamma.$$

a řešením

$$\begin{aligned} \xi &= Ae^{\omega_+ z} + Be^{\omega_- z}, \\ \xi &= Ae^{\gamma z}e^{i\gamma z} + Be^{-\gamma z}e^{-i\gamma z}. \end{aligned}$$

Řešení našeho problému najdeme aplikací okrajových podmínek (1). Protože řešení musí být omezené pro $z \to \infty$, musí být $A = 0$, tedy

$$\xi = Be^{-\gamma z}e^{-i\gamma z} + \xi_g.$$

Pro $z = 0$ je $\xi = 0$, a tedy

$$\begin{aligned} B &= -\xi_g, \\ \xi &= \xi_g\left(1 - e^{-\gamma z}e^{-i\gamma z}\right). \end{aligned}$$

Po oddělení reálné a imaginární složky dostáváme

$$\begin{aligned} u &= G\left(1 - e^{-\gamma z}\cos\gamma z\right), \\ v &= G\left(e^{-\gamma z}\sin\gamma z\right). \end{aligned}$$

Průběh hodnot u a v pro různé hodnoty z jsou na obrázku 1. Vektory v rychlosti v různých výškách tvoří spirálu, jejíž horizontální průmět je na obrázku 2.

Z rovnosti derivací obou složek rychlosti dále dostáváme, že je u povrchu směr větru stočen o 45° doleva oproti směru geostrofického větru.

Maximum vlikosti rychlosti větru nastává pro $z \doteq {}^{2.2841}/_{\gamma}$ s hodnotou

$$u \doteq 1{,}069\,G,$$

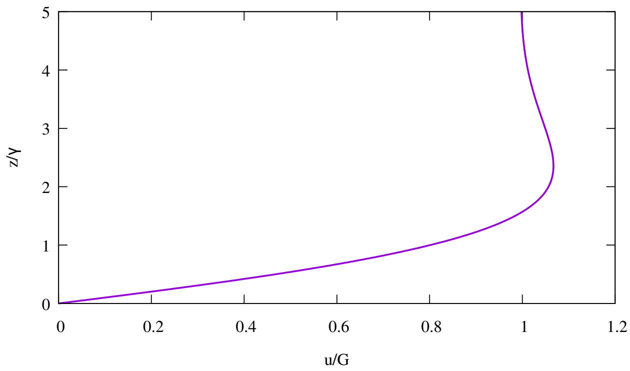
a pro $z = {}^{\pi}/_{\gamma}$ je směr rychlosti větru roven směru geostrofického větru (tedy $v = 0$) a velikost rychlosti je rovna

$$u = G\left(1 + e^{-\pi}\right) \doteq 1{,}043\,G,$$

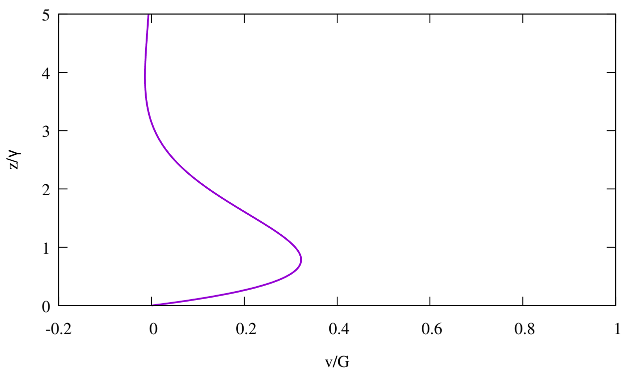
a je tedy také vyšší, než je velikost geostrofické rychlosti.

Frikční rychlost, a tedy sílu tření o zemský povrch, můžeme spočítat jako

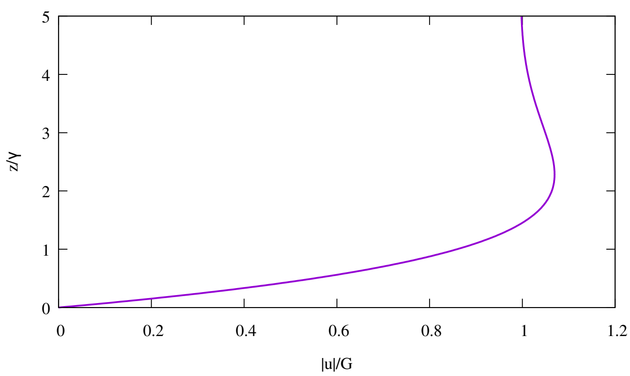
$$\begin{aligned} u_*^2 &= \sqrt{\left(\overline{u'u'}\right)^2 + \left(\overline{v'v'}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(K\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(K\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2}. \end{aligned}$$



a)

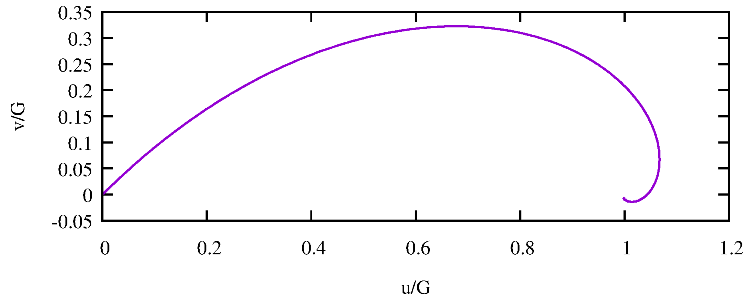


b)



c)

Obrázek 1: Průběh složek rychlosti a velikosti rychlosti v Ekmanově spirále. a) složka u, b) složka v, c) velikost rychlosti.



Obrázek 2: Průmět vektorů rychlosti větru v Ekmanově spirále pro různé výšky jako parametrická křivka $(u(z), v(z))$. Maximum velikosti rychlosti nastává ve výšce $z = \frac{\pi}{\gamma}$, kdy je složka $v = 0$.

Obě parciální derivace složek rychlosti u povrchu jsou rovny $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = G\gamma$, a tedy

$$u_*^2 = KfG^2,$$

kde Kf hraje roli koeficientu aerodynamického odporu C_d.

Přenější aproximaci aerodynamického odporu mezní vrstvy, která uvažuje i přízemní vrstvu a parametr drsnosti povrchu z_0, a nepotřebuje explicitní hodnotu K, uvádí např. [1] jako

$$u_*^2 = \frac{\kappa^2}{\left[\ln\left(\frac{u_*}{fz_0}\right)^2 - A\right] + B^2} G^2,$$

s úhlem stočení větru

$$\alpha = \mathrm{arctg2}\left[\ln\left(\frac{u_*}{fz_0}\right) - A, B\right],$$

kde A a B jsou empirické konstanty. Jejich možné hodnoty podle [1] jsou $A = 1.8$ a $B = 4.5$.

Reference

[1] Tennekes, Lumley (1972) A First Course in Turbulence. M.I.T. Press.